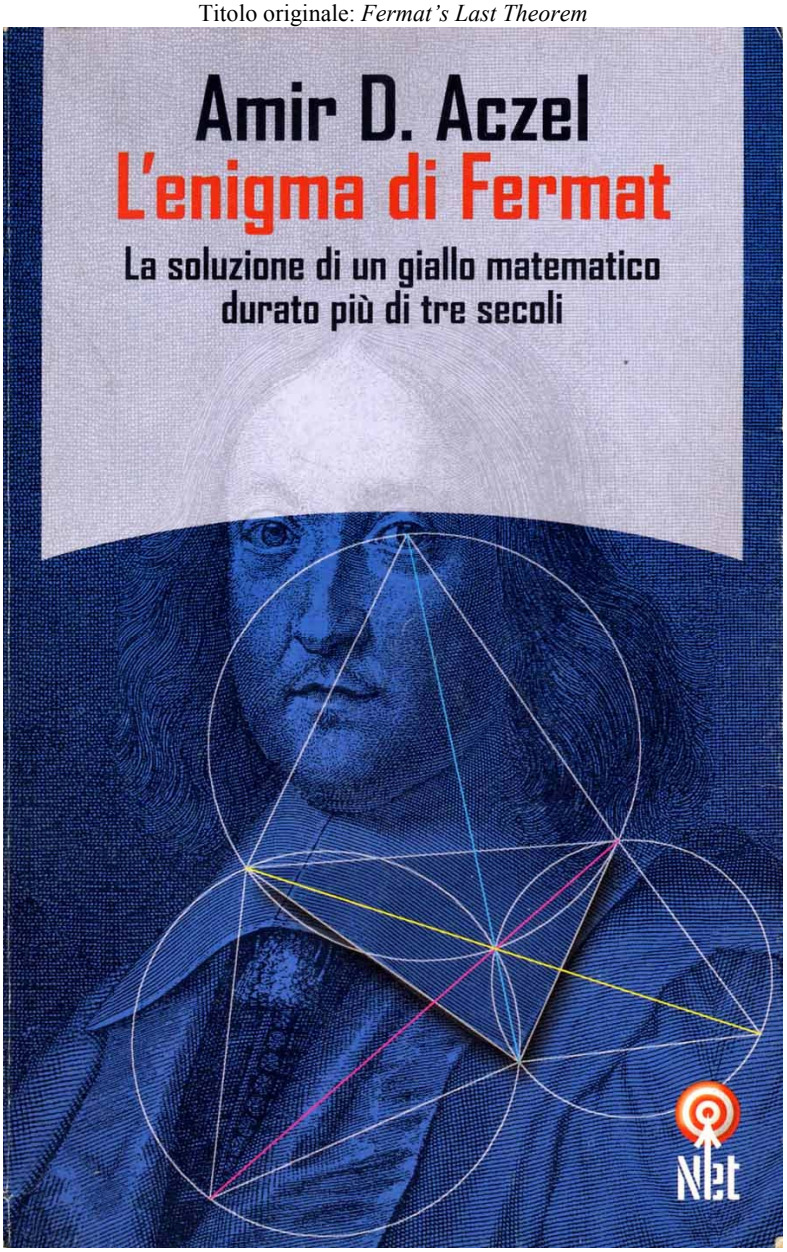
Amir D. Aczel

L’enigma di Fermat

La soluzione di un giallo matematico durato più di tre secoli

TRADUZIONE DI GIANNI RIGAMONTI

www.saggiatore.it
www.lineaombra.it
© Amir D. Aczel, 1996
© Gruppo editoriale il Saggiatore S.p.A., Milano 2003
Prima edizione: il Saggiatore, Milano 1998
Nuove edizioni tascabili
Titolo originale: *Fermat’s Last Theorem*



VISIT…

Indice

L'enigma di Fermat 4

Prefazione 5

Cambridge, Inghilterra, giugno 1993 8
Pierre de Fermat 10
I numeri primi 12
Una celebre glossa 12
Luglio-agosto 1993: si scopre un errore fatale 13
Fra il Tigri e l'Eufrate intorno al 2000 a.C. 14
La ricchezza è una quantità al quadrato 14
Plimpton 322 15
Un'antica società di adoratori del numero tenuti al segreto per giuramento 16
Il numero è tutto 17
Il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati 17
Numeri interi, frazioni e che altro? 18
L'eredità dei pitagorici 20
Le corde, il Nilo e la nascita della geometria 22
Che cos'è un teorema? 23
Eureka!. Eureka!. 23
Alessandria, Egitto greco, 250 d.C. circa 25
Le mille e una notte 26
Il mercante medievale e la sezione aurea 27
I cosisti 29
Il Rinascimento: alla ricerca del sapere antico 30
Quadrati, cubi e dimensioni superiori 31
L'algorista 32
I sette ponti di Königsberg 34
Gauss, grande genio tedesco 35
I numeri immaginari 37
Sophie Germain 38
La luminosa cometa del 1811 39
Il discepolo 40
I matematici di Napoleone 41
Le funzioni periodiche 42
Una dimostrazione zoppa 44
I numeri ideali 44
Un altro premio 46
La geometria senza Euclide 46
Bellezza e tragedia 47
Un'altra vittima 49
Gli ideali di Dedekind 50
Fin de siècle 51
Le forme modulari 52
Un collegamento inatteso con le ciambelle 54
La prova di Faltings 55
Il misterioso generale greco dallo strano nome 56
Le curve ellittiche 58
La nascita di una strana congettura 59
Tokyo, primi anni cinquanta 60
Un inizio promettente 63
Lei sta dicendo che.. 63
La Congettura di Shimura 64
Intrigo e tradimento 65
Un esercizio per il lettore interessato 67
La menzogna 68
Nella Foresta Nera, autunno 1984 69
Il teorema di Ribet 71
Il sogno di un bambino 74
L'antica fiamma si ravviva 74
Suddividere un compito formidabile in tanti problemi più piccoli 76

L’articolo di Flach 76
Un amico fidato 77
L’ultima tessera del grande mosaico 79
Il seguito 80
La grande voragine si spalanca 81
Sofferenza 82
Post mortem 82
Fermat aveva una prova? 84

Nota dell’autore 87

L’enigma di Fermat

A mio padre

Pierre de Fermat (1601-1665)

Prefazione

Nel giugno del 1993 il mio vecchio amico Tom Schulte era venuto a trovarmi a Boston dalla California. Ce ne stavamo seduti al sole in un caffè all'aperto di Newbury Street, con delle bibite ghiacciate davanti a noi. Tom aveva appena divorziato ed era pensieroso. Si girò a metà verso di me. «A proposito» disse «hanno dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat.» Mentre tornava a guardare la zona pedonale, pensai che doveva essere un'altra delle sue battute. Vent'anni prima io e Tom eravamo stati compagni di stanza alla University of California, a Berkeley, quanto studiavamo tutti e due matematica. A quel tempo parlavamo spesso dell'Ultimo Teorema di Fermat; e parlavamo anche di funzioni, insiemi, campi numerici, topologia. Nessuno studente di matematica dormiva molto la notte, perché le cose che avevamo da studiare erano difficilissime; era questo a distinguerci dagli studenti degli altri corsi. A volte avevamo incubi matematici, come cercare di dimostrare questo o quel teorema prima di essere chiamati a farlo il mattino seguente. Ma l'Ultimo Teorema di Fermat? Nessuno pensava che sarebbe stato dimostrato, nell'arco della nostra vita; era così difficile, e tanti avevano cercato di provarlo per più di trecento anni. Sapevamo benissimo che interi settori della matematica erano stati sviluppati proprio tentando di dimostrarlo; ma tutti i tentativi erano falliti, uno dopo l'altro.

L'Ultimo Teorema di Fermat era diventato il simbolo dell'irraggiungibile, tanto che una volta ero riuscito a trarre profitto da quella sua presunta inviolabilità. Era successo qualche anno dopo, sempre a Berkeley: mi ero già laureato in matematica e stavo studiando per il master in ricerca operativa. Un dottorando in matematica, molto presuntuoso ma ignaro dei miei studi, si offrì di aiutarmi. Ci eravamo appena conosciuti all'International House, dove alloggiavamo entrambi. «Io sono di matematica pura» disse. «Se ti dovesse capitare un problema matematico che non sai risolvere, chiedi pure a me.» Fece per andarsene, ma lo fermai: «Ah, ecco.. C'è una cosa in cui mi puoi aiutare..». Si girò: «Ma certo, vediamo pure». Presi un tovagliolino di carta (eravamo in sala da pranzo) e vi scrissi sopra, lentamente:

$x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni intere se n è maggiore di 2.

«È da ieri sera che cerco di dimostrarlo» dissi porgendogli il tovagliolo. Lo vidi sbiancare in volto. «L'Ultimo Teorema di Fermat» mormorò. «Sì» dissi io. «Tu sei di matematica pura, mi puoi aiutare?» Non mi è mai più capitato di incontrarlo.

«Dico sul serio» insistè Tom, finendo la sua bibita. «Andrew Wiles. Ha dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat a Cambridge, pochi giorni fa. Ricordati questo nome. Ne sentirai parlare molto.»

Quella sera Tom era già sull'aereo di ritorno, diretto in California; nei mesi successivi capii che non mi aveva preso in giro e seguii tutta la successione degli eventi: prima Wiles venne applaudito, poi saltò fuori una lacuna nella sua dimostrazione, lui sparì per un anno e alla fine tornò alla carica con una dimostrazione corretta. Ma mentre seguivo questa complessa vicenda mi resi conto che Tom si era sbagliato. Non era al nome di Andrew Wiles che dovevo fare attenzione; o almeno, non solo a quello. Dovevo ancora capire (come del resto gran parte del mondo) che la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat non era stata affatto opera di un solo matematico. Wiles aveva avuto la sua parte di gloria; ma il riconoscimento spetta, in misura almeno uguale, anche ad altri: Ken Ribet, Barry Mazur, Goro Shimura, Yutaka Taniyama, Gerhard Frey, solo per ricordarne alcuni. Questo libro ripercorre l'intera vicenda della soluzione dell'enigma di Fermat, compreso ciò che è accaduto dietro le quinte, fuori dal campo delle telecamere e dei riflettori dei media. Perché questa è anche una storia di inganni, intrighi e tradimenti.

"Forse la mia esperienza matematica può essere descritta nel modo migliore paragonandola a quello che si prova entrando in una casa buia. Fai qualche passo incerto nella prima stanza, ed è buio, buio completo. Ti muovi a tentoni, urti nei mobili e a poco a poco impari dove si trovano questo e quello; finalmente, magari dopo sei mesi, trovi un interruttore, lo premi, e tutto si illumina, e puoi vedere esattamente dove sei stato. Quindi entri in un'altra stanza buia.."

Così il professor Andrew Wiles descrive la sua settennale ricerca del Santo Graal dei matematici.

Il 23 giugno 1993, poco prima dell'alba, il professor John Conway raggiunse l'istituto di matematica, completamente buio, nel campus dell'università di Princeton; aprì il portone e salì subito nel suo ufficio. Per settimane, prima che il suo collega Andrew Wiles partisse per l'Inghilterra, voci insistenti ma imprecise erano circolate nella comunità mondiale dei matematici; Conway si aspettava che accadesse qualcosa di importante, ma che cosa esattamente? Non ne aveva idea. Accese il computer e sedette, osservando lo schermo. Alle cinque e cinquantatré giunse dall'altra sponda dell'Atlantico una concisa *e-mail:* "Wiles dimostra U.T.F.".

Cambridge, Inghilterra, giugno 1993

Nella seconda metà del giugno 1993 il professor Andrew Wiles prese l'aereo per l'Inghilterra. Tornava alla Cambridge University, dove vent'anni prima aveva conseguito il dottorato di ricerca; il professor John Coates, relatore della sua tesi a Cambridge, stava organizzando un convegno sulla Teoria di Iwasawa, il settore della teoria dei numeri su cui Andrew Wiles aveva scritto la sua tesi e di cui era un esperto. Coates aveva chiesto al suo ex allievo se era disposto a fare un intervento di un'ora al convegno, su un argomento di sua scelta, e il timidissimo Wiles, da sempre riluttante a parlare in pubblico, aveva risposto, con grande sorpresa di Coates e degli altri organizzatori, chiedendo se poteva averne a disposizione tre.

All'arrivo a Cambridge Wiles, allora quarantenne, aveva l'aspetto del matematico tipico: camicia bianca con le maniche arrotolate, occhiali spessi con montatura di corno, capigliatura bionda e rada, dai ciuffi ribelli. Era nato a Cambridge e il suo ritorno era un modo speciale di farsi rivedere a casa: la realizzazione di un sogno d'infanzia. Andrew Wiles aveva trascorso gli ultimi sette anni come un vero recluso nel suo attico, ma sperava che quel periodo di sacrifici, di lotta, di lunghe ore di solitudine volgesse ormai al termine. Fra poco, forse, avrebbe potuto passare più tempo con la moglie e le figlie, che da sette anni vedeva così di rado. Aveva saltato molti pranzi e tè in famiglia, facendosi vedere solo per cena; ma ora gli elogi sarebbero stati tutti per lui.

Il Sir Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences di Cambridge era stato inaugurato da poco quando il professor Wiles vi giunse per tenere le sue tre ore di lezione. È un vasto edificio, situato in un paesaggio suggestivo a una certa distanza dall'università; oltre alle aule comprende ampi locali arredati con sedie comode ed eleganti, e spazi concepiti per facilitare gli scambi informali di idee fra studiosi e

scienziati e quindi promuovere lo studio e il sapere.

Pur conoscendo la maggioranza degli altri matematici, venuti da tutto il mondo a quel convegno specialistico, Wiles rimaneva in disparte; quando i colleghi si mostravano incuriositi per la lunghezza del suo intervento, lui rispondeva loro di venire a sentire, per rendersi conto di persona. Modi tanto misteriosi erano insoliti, anche per un matematico. Spesso i matematici, quando cercano di dimostrare un teorema, lavorano da soli, e generalmente non godono la reputazione d'essere gli individui più socievoli del mondo; ma di solito si comunicano le loro scoperte. I risultati matematici circolano liberamente; gli autori li fanno girare sotto forma di *preprint,* vale a dire di stesura provvisoria, e queste stesure provvisorie assicurano loro i consigli di altri studiosi, che li aiutano a migliorare il lavoro prima di pubblicarlo. Ma Wiles non aveva distribuito *preprints,* né aveva parlato del suo lavoro. Dal titolo annunciato, *Forme modulari, curve ellittiche e rappresentazioni di Galois,* non si riusciva a capire dove sarebbe andato a parare, e nemmeno gli esperti del settore riuscivano a indovinare nulla. Con il passare del tempo, alcune voci si facevano più insistenti.

Il primo giorno Wiles premiò la ventina di specialisti che erano venuti a sentirlo con un risultato matematico sostanzioso e sorprendente: e c'erano altre due lezioni in programma. Che cosa bolliva in pentola? Ormai appariva chiaro a tutti che le sue lezioni costituivano l'evento da non perdere, e la tensione aumentava man mano che i matematici, in fervida attesa, accorrevano numerosi.

Il secondo giorno Wiles cominciò a procedere più spedito. Aveva portato con sé oltre duecento pagine *di* formule e deduzioni, di idee originali che avevano la forma di nuovi teoremi, con lunghe dimostrazioni astratte. Ora l'aula era affollata e ognuno ascoltava con attenzione. Dove voleva andare a parare? Non lo faceva capire. Continuava a scrivere alla lavagna, tranquillo, e non appena ebbe terminato si volatilizzò.

L'ultima lezione ebbe luogo il giorno seguente, mercoledì 23 giugno 1993. Per entrare nell'aula, Wiles dovette farsi strada a spintoni. La gente si assiepava anche all'esterno, bloccando l'ingresso, e il locale era affollatissimo. Molti avevano con sé una macchina fotografica. Man mano che Wiles scriveva, di nuovo, formule e teoremi che sembravano senza fine, la tensione aumentava. In seguito il professor Ken Ribet della University of California di Berkeley mi disse: «Quel crescendo poteva avere solo un finale, c'era una sola possibile conclusione dell'esposizione di Wiles». Wiles stava scrivendo le ultime righe della dimostrazione di un'ipotesi matematica enigmatica e complicata, la Congettura di Shimura-Taniyama; poi, improvvisamente, aggiunse un'ultima riga, rienunciando un'equazione vecchia di secoli che, come Ribet aveva dimostrato sette anni prima, seguiva da quella congettura. «Così questo dimostra l'Ultimo Teorema di Fermat» aggiunse sbrigativamente; «penso che mi fermerò qui.»

Nell'aula ci fu un istante di silenzio allibito, poi il pubblico esplose in un'ovazione spontanea. I flash lampeggiarono, tutti si alzarono per congratularsi con un Wiles raggiante. Nel giro di pochi minuti i messaggi elettronici e i fax inondarono il mondo. A quanto sembrava, il più celebre problema matematico di tutti i tempi era stato risolto.

"La cosa più inattesa fu il diluvio della stampa mondiale il giorno successivo" ricorda il professor John Coates, che aveva organizzato il convegno senza aspettarsi minimamente che diventasse la rampa di lancio di uno dei massimi trionfi della matematica. I titoli dei giornali di tutto il mondo salutavano questo successo imprevisto. La prima pagina del *New York Times* del 24 giugno 1993 annunciava: "Finalmente un grido, 'Eureka!', risolve un antico mistero matematico". In un lungo articolo, il *Washington Post* chiamava Wiles "l'uccisore del drago matematico", e un po' qua un po' là fiorivano gli aneddoti sulla persona che, a quanto sembrava, aveva risolto il problema più ostinato di tutta la matematica: un enigma che da più di tre secoli e mezzo sfidava ogni soluzione. Il tranquillo e riservatissimo Andrew Wiles finì da un giorno all'altro sulla bocca di tutti.

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat, francese, vissuto nel Seicento, era un magistrato che coltivava l'hobby della matematica. Ma sebbene fosse appunto un dilettante, dato che la sua professione era quella del giudice, egli fu, come scrisse lo storico della matematica E.T. Bell, attivo nei primi anni del Novecento, il "principe dei dilettanti". Secondo Bell, Fermat aveva ottenuto risultati più importanti di quelli della maggior parte dei matematici "professionisti" dell'epoca e anzi era stato l'autore più prolifico del Seicento, un secolo che aveva visto all'opera alcuni dei massimi cervelli matematici di tutti i tempi.[1]

Una delle conquiste più stupefacenti di Fermat fu l'elaborazione delle idee fondamentali del calcolo infinitesimale, tredici anni prima che Isaac Newton nascesse. La tradizione più diffusa attribuisce congiuntamente a Newton e al suo coetaneo Gottfried Wilhelm von Leibniz il merito di aver concepito quella teoria matematica che tratta di moto, accelerazione, forze, orbite e altri concetti matematici applicati alle trasformazioni continue, vale a dire quello che oggi chiamiamo calcolo infinitesimale.

Fermat era affascinato dall'opera degli antichi matematici greci, ed è possibile che siano stati proprio due di questi, Archimede ed Eudosso, vissuti rispettivamente nel III e IV secolo a.C., a ispirarlo nell'elaborazione del calcolo infinitesimale. Studiava le opere degli antichi, che ai suoi tempi circolavano in traduzioni latine, in ogni momento libero; aveva un lavoro a tempo pieno (era un magistrato importante), ma la sua passione era cercare di generalizzare le conquiste degli antichi e trovare sempre nuove bellezze nelle loro scoperte, sepolte a lungo nell'oblio. "Ho trovato un gran numero di teoremi straordinariamente belli" disse una volta; e questi teoremi li annotava ai margini delle traduzioni di opere antiche che possedeva.

Fermat era figlio di un mercante di pellami, Dominique Fermat, secondo console della città di Beaumont-de-Lomagne, e di Claire de Long, proveniente da una famiglia di magistrati dell'ordine giudiziario. Era nato nell'agosto del 1601 (fu battezzato il 20 di quel mese a Beaumont-de-Lomagne) e i suoi genitori lo avviarono

[1] E.T. Bell, Men of Mathematics, Simon and Schuster, New York 1937, pag. 56

agli studi per diventare magistrato. Studiò a Tolosa, dove divenne Commissario alle Richieste all'età di trent'anni; nello stesso anno (1631) sposò Louise de Long, una cugina della madre. Pierre e Louise ebbero cinque figli: tre maschi e due femmine; uno dei maschi, Clément Samuel, divenne l'esecutore testamentario scientifico del padre e pubblicò postume le sue opere. L'edizione delle opere di Fermat che ci è pervenuta è appunto quella pubblicata dal figlio, ed è grazie a essa che noi conosciamo il celebre Ultimo Teorema. Clément Samuel de Fermat infatti si era reso conto dell'importanza di quel teorema annotato a margine, e l'aveva aggiunto all'edizione dell'opera di Diofanto da lui ripubblicata.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 - 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. - 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. - 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 - 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ δὲ δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὑποτιθέσθω δὴ ὁ τϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ τοῦ ἑνὸς δυνάμεως μηδ. ἔσται ἄρα μηδ- δες τϛ λείψει δυνάμεως μηδ ἴσους τῷ πλευρῷ. πλάσσω τὸ τετράγωνον δηοῦ ες. ἴσων δὴ πᾶσι λείψει πανταχοῦ μ ἴσων ὄντων ἑνὶ τϛ μ᾽ πλευρὰ ἴση ες β λείψει μ᾽ δ. καὶ πάλιν ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μ᾽ ιϛ [λείψει ες ιϛ.] πάντα ἴσα μηδὰν ιϛ λείψει δυνάμεις μηδ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ λοιπὰ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις πεμπτῶν. ἔσται ὁ μβὸ σπϛ εἰκοσιπεμπτῶν. ὁ δὲ μιᾶς εἰκοσιπεμπτῶν, ἐστὶ δὲ καὶ ὁ δύο εἰκοσιπέμπτου τετράγωνος ὁ δὲ ὑπόλοιπος τετράγωνος.

L'edizione dell'Arithmetica di Diofanto pubblicata dal figlio di Fermat, Samuel. La copia originale con l'annotazione autografa di Fermat non è mai stata ritrovata.

In genere si parla della vita di Fermat come di un'esistenza tranquilla, stabile e priva di eventi esteriori. Svolgeva il suo lavoro onestamente e con dignità, e nel 1648 fu promosso a una funzione importante, consigliere del re al Parlamento provinciale di Tolosa; conservò questa posizione fino alla morte, nel 1665. Considerato il suo intenso lavoro per la corona, cui consacrò una vita di servizio devoto, abile e coscienzioso, molti storici non riescono a spiegarsi come riuscisse a trovare il tempo e l'energia mentale per elaborare una matematica di prim'ordine, scrivendone per giunta libri e libri. Uno studioso francese ha avanzato l'ipotesi che l'incarico ufficiale di Fermat fosse, di fatto, vantaggioso per i suoi studi matematici, dato che i magistrati dei *parlements,* che erano anche le supreme corti di giustizia francesi, dovevano, almeno in teoria, ridurre al minimo le loro relazioni non professionali, onde evitare le tentazioni dei donativi e di altre forme di corruzione; e poiché Fermat aveva sicuramente bisogno di distrarsi, dato che il suo lavoro era molto impegnativo e lo obbligava a limitare la vita di società, la matematica doveva offrirgli quel diversivo di cui aveva tanto bisogno. D'altronde le idee di base del calcolo infinitesimale non furono affatto la sua unica conquista; Fermat ci ha lasciato anche la teoria dei numeri,

una disciplina in cui il concetto di numero primo ha una straordinaria importanza.

I numeri primi

I numeri 1,2 e 3 sono primi. Il numero 4 non è primo perché è il prodotto di 2 per 2 ($2 \times 2 = 4$). Il numero 5 è primo. Il numero 6 non è primo perché è, come 4, il prodotto di due numeri ($2 \times 3 = 6$). 7 è primo, 8 non lo è ($2 \times 2 \times 2 = 8$), 9 nemmeno ($3 \times 3 = 9$) e 10 neppure ($2x5 = 10$). Ma 11 è di nuovo primo perché non esistono interi (a parte 1 e lo stesso 11) che moltiplicati fra di loro diano 11. E possiamo continuare allo stesso modo: 12 non è primo, 13 lo è, 14, 15 e 16 non lo sono, 17 lo è, e così via. In questa serie non è riconoscibile alcuna struttura del tipo "un numero ogni quattro è primo", e neppure una più complicata. Sin dalla più remota antichità il concetto di numero primo affascina e confonde gli esseri umani. I numeri primi sono gli elementi essenziali della teoria dei numeri, e il fatto che non abbiano una struttura facilmente riconoscibile rende priva di unità questa teoria e isola i suoi problemi rispetto a tutti gli altri, rendendoli difficili da risolvere e privi di chiare implicazioni per ambiti diversi della matematica. Come dice Barry Mazur, "La teoria dei numeri produce senza sforzo innumerevoli problemi che hanno un'aria dolce, innocente e tentatrice, come dei fiorellini, ma.. brulica di calabroni che aspettano solo di pungere gli amanti dei fiori; e questi, una volta punti, si sentono spinti a fatiche senza limiti".[2]

Una celebre glossa

Fermat era soggiogato dal fascino dei numeri, entità in cui scorgeva bellezza e profondo significato. Enunciò diversi teoremi di teoria dei numeri; uno di questi diceva che ogni numero della forma $2^{2^n} + 1$ (2 elevato al quadrato elevato all'ennesima potenza più 1) era un numero primo. In seguito si scoprì che il teorema era falso, quando fu trovato un numero di questa forma che non era primo. Fra le traduzioni latine dei testi antichi, tanto care a Fermat, c'era quella di un libro intitolato *Arithmetica,* del matematico greco Diofanto, vissuto ad Alessandria nel III secolo d.C. Intorno al 1637 Fermat scrisse in latino, a margine del suo Diofanto (accanto a un problema di scomposizione di un quadrato in due quadrati):

> D'altra parte non è possibile scomporre un cubo in due cubi, un biquadrato in due biquadrati o in generale ogni potenza, eccetto il quadrato, in due potenze con lo stesso esponente. Di ciò ho scoperto una dimostrazione veramente meravigliosa. Tuttavia la ristrettezza del margine non basterebbe a contenerla.

Questa misteriosa affermazione ha tenuto occupate generazioni di matematici nel tentativo di trovare la "dimostrazione veramente meravigliosa" che Fermat sosteneva

[2] B. Mazur, «Number Theory as Gadfly» [La teoria dei numeri come mosca cocchiera], in American Mathematical Monthly, 1991, vol. XCVIII, pag. 593.

di possedere. In sé l'affermazione che, mentre un quadrato di un intero può a volte essere scomposto in due altri quadrati di numeri interi (per esempio 5^2, cioè *25,* è uguale alla somma di 4^2, cioè 16, e 3^2, cioè 9), ciò è impossibile nel caso dei cubi e delle potenze più elevate, è ingannevolmente semplice. Poco dopo il 1800 tutti gli altri teoremi di Fermat erano stati dimostrati o confutati; questo, a prima vista molto semplice, rimaneva insoluto, e perciò ebbe il nome di Ultimo Teorema di Fermat. Era o non era vero? Nel nostro secolo sono stati impiegati i computer per cercare di svelare questo enigma; ora, i computer potevano verificarlo per numeri grandissimi, ma non certo per *tutti* i numeri. Si potevano provare miliardi e miliardi di numeri, ma ne rimanevano comunque infiniti altri (e infiniti altri esponenti) da controllare. Per confermare l'Ultimo Teorema di Fermat era necessaria una dimostrazione matematica. Nell'Ottocento le Accademie delle scienze di Francia e Germania offrirono un premio a chiunque avesse trovato una prova, e ogni anno migliaia di matematici, dilettanti e ciarlatani mandavano le loro "dimostrazioni" a riviste scientifiche e commissioni giudicatrici, rimanendo alla fine sempre a mani vuote.

Luglio-agosto 1993: si scopre un errore fatale

I matematici erano cautamente ottimisti quando Wiles scese dal podio quel mercoledì di giugno. Sembrava ormai che l'enigma, dopo tre secoli e mezzo, fosse stato risolto. La lunghissima dimostrazione di Wiles, che impiegava complicate nozioni matematiche e teorie certo sconosciute all'epoca di Fermat e anzi fino a tutto l'Ottocento, doveva essere convalidata da esperti indipendenti, e a tale scopo fu inviata a diversi matematici di primo piano; forse Wiles stava finalmente per essere ricompensato di sette anni di lavoro solitario, nell'isolamento della sua soffitta. Ma l'ottimismo ebbe vita breve. Nel giro di poche settimane venne scoperta una lacuna nella logica di Wiles; questi cercò di colmarla, ma la lacuna persisteva. Il matematico di Princeton Peter Sarnak, suo ottimo amico, lo vedeva torturarsi, giorno dopo giorno, intorno alla dimostrazione che appena due mesi prima, a Cambridge, aveva dichiarato a tutto il mondo di possedere. "Era come se Andrew cercasse di stendere sul pavimento un tappeto troppo grande per la stanza" spiega Sarnak. "Lo srotolava e il tappeto si adattava perfettamente a uno dei lati, ma dalla parte opposta il bordo copriva un pezzo di muro; allora lui andava in quel punto, abbassava il bordo.. e il tappeto saltava su da un'altra parte. E così non riusciva a capire se il tappeto avesse le misure giuste per la stanza." Wiles si ritirò in soffitta, e i cronisti del *New York Times* e degli altri giornali lo lasciarono al suo solitario lavoro. Il tempo passava, la dimostrazione non compariva, i matematici e il grande pubblico cominciavano a chiedersi se quel teorema fosse poi vero. La meravigliosa dimostrazione che il professor Wiles aveva dichiarato a tutto il mondo di possedere si stava rivelando altrettanto irreale della "dimostrazione veramente meravigliosa che la ristrettezza del margine non basterebbe a contenere" di cui aveva scritto Pierre de Fermat.

Fra il Tigri e l'Eufrate intorno al 2000 a.C.

La storia dell'Ultimo Teorema di Fermat è molto più antica dello stesso Fermat, anzi è più antica di Diofanto, di cui Fermat cercava di generalizzare i risultati. Le origini di questo teorema, apparentemente semplice ma in realtà profondo, sono antiche quanto la civiltà stessa; esse affondano le loro radici nella cultura dell'Età del Bronzo che si sviluppò nella Mezzaluna Fertile, fra il Tigri e l'Eufrate, intorno all'antica Babilonia (in una regione che oggi fa parte dell'Iraq). E anche se l'Ultimo Teorema di Fermat è una proposizione astratta, priva di applicazioni nella scienza, nell'ingegneria, nella matematica e nella stessa teoria dei numeri, che è il suo habitat matematico, le sue radici affondano nella vita quotidiana di coloro che abitavano la Mesopotamia intorno al 2000 a.C.

Il periodo che va dal 2000 al 600 a.C. in Mesopotamia corrisponde alla cosiddetta Età babilonese: un'epoca che vide importanti conquiste culturali, come la scrittura, l'uso della ruota e la metallurgia. Per irrigare vasti terreni fra i due fiumi fu costruito un sistema di canali. Man mano che nella fertile valle babilonese fioriva la civiltà, le antiche popolazioni che abitavano le sue pianure impararono a commerciare e a costruire città come Babilonia e Ur (dove nacque Abramo). Forme primitive di scrittura si erano sviluppate ancora prima, verso la fine del IV millennio a.C., sia in Mesopotamia che in un'altra valle, quella del Nilo. In Mesopotamia, dove l'argilla abbondava, si imprimevano con uno stilo dei segni cuneiformi su tavolette d'argilla tenera che poi venivano cotte al forno o lasciate essiccare al sole. Il sistema cuneiforme è la prima forma di scrittura che il mondo abbia mai avuto.

Lo sviluppo del commercio e dell'edilizia resero necessarie misurazioni accurate sia in Egitto che a Babilonia. Gli antichi scienziati di queste società dell'Età del Bronzo impararono a stimare il rapporto fra la circonferenza e il diametro di un cerchio, ottenendo un numero vicino a quello che oggi chiamiamo "pi greco". Coloro che costruirono la Ziggurat gigante (la biblica torre di Babele) e i giardini pensili di Babilonia, una delle sette meraviglie del mondo antico, avevano bisogno di tecniche per calcolare aree e volumi.

La ricchezza è una quantità al quadrato

Fu così elaborato un raffinato sistema numerico, in base 60, grazie al quale gli ingegneri e gli architetti babilonesi erano in grado di calcolare le grandezze di cui avevano bisogno nella loro attività professionale quotidiana. I numeri quadrati si presentano in modo naturale nella vita, anche se a prima vista non si direbbe; per esempio possiamo rappresentare la ricchezza come numero quadrato. La prosperità di un agricoltore dipende dal raccolto che è in grado di produrre, e il raccolto dipende a sua volta *dall'area* a sua disposizione; l'area è il prodotto della lunghezza del campo per la sua larghezza, ed è qui che entrano in scena i quadrati. Un campo che abbia lunghezza e larghezza uguali ad *a* ha area uguale ad *a* al quadrato; perciò la ricchezza

è, in questo senso, una grandezza al quadrato.

I babilonesi volevano sapere quando è possibile scomporre il quadrato di un numero intero in altri quadrati di numeri interi. Un contadino che possieda un campo di venticinque unità quadrate di terra può scambiarlo con due campi che misurino, rispettivamente, sedici e nove unità quadrate. Perciò un campo di cinque unità per cinque equivale a due campi, uno di quattro unità per quattro e uno di tre per tre; questa informazione era importante per la soluzione di un problema pratico. Oggi scriveremmo tale relazione in forma di equazione: $5^2 = 4^2 + 3^2$. Le terne di interi, come 3, 4 e 5, i cui quadrati soddisfano questa relazione sono dette pitagoriche anche se erano note ai babilonesi oltre mille anni prima dell'epoca del celebre matematico greco Pitagora, da cui hanno preso il nome. La familiarità dei babilonesi con questo problema ci è attestata da un'insolita tavoletta di argilla databile al 1900 a.C. circa.

Plimpton 322

I babilonesi erano grandi compilatori di tabelle e l'abbondanza di argilla, insieme alla tecnica della scrittura cuneiforme, permise loro di crearne moltissime; parecchie si sono conservate fino a oggi, grazie alla durata praticamente illimitata delle tavolette d'argilla. In una sola località (il luogo dove sorgeva l'antica Nippur) ne sono state raccolte più di 50000, che oggi si trovano nelle collezioni dei musei della Yale University, della Columbia University e della Pennsylvania University, e in altri luoghi ancora. Molte di esse, che non sono state mai più lette né decifrate, rimangono a coprirsi di polvere nei sotterranei dei musei.

Tra quelle che sono state decifrate ce n'è una davvero notevole: è conservata nel museo della Columbia University ed è stata chiamata *Plimpton 322*. Contiene in tutto quindici terne di numeri; il primo numero di ogni terna è un quadrato ed è la somma degli altri due, che sono a loro volta quadrati; la tavoletta contiene cioè quindici terne pitagoriche.[3] I numeri $25 = 16 + 9$ ricordati sopra formano una terna pitagorica; un'altra terna pitagorica di *Plimpton 322* è $169 = 144 + 25$ ($13^2 = 12^2 + 5^2$). Non tutti gli studiosi attribuiscono l'interesse degli antichi babilonesi per questi numeri allo stesso motivo. Secondo una prima teoria tale interesse aveva solamente ragioni pratiche, e il fatto che queste antiche popolazioni usassero un sistema numerico in base 60 e preferissero quindi gli interi alle frazioni è un punto a favore della necessità di risolvere problemi pratici con dei quadrati interi; altri esperti pensano invece che l'attenzione dei babilonesi verso i quadrati potesse essere motivata anche da un interesse intrinseco per i numeri in quanto tali. Comunque, quale che fosse la motivazione, *Plimpton 322* era forse un sussidio didattico, utile per insegnare agli studenti come risolvere problemi nei quali i numeri sono quadrati perfetti.

L'approccio babilonese non mirava a elaborare una teoria generale per la soluzione di questi problemi, bensì a fornire delle tabelle in cui fossero riportate terne di

[3] *Plimpton 322* e le sue implicazioni sull'alto livello della matematica babilonese sono stati proposti all'attenzione della comunità scientifica da Otto Neugebauer nel 1934. Si può trovare una trattazione dell'argomento in O. Neugebauer, *Le scienze esatte nell'antichità,* Feltrinelli, Milano 1972.

numeri; anche, a quanto pare, per insegnare ai ragazzi a leggere e a usare queste tabelle.

Un'antica società di adoratori del numero tenuti al segreto per giuramento

Pitagora nacque nell'isola greca di Samo intorno al 580 a.C. Viaggiò a lungo per tutto il mondo antico: visitò Babilonia, l'Egitto e forse anche l'India. Durante questi viaggi venne in contatto con diversi matematici, soprattutto a Babilonia, e probabilmente ebbe notizia dei loro studi sui numeri che oggi portano il suo nome, le terne pitagoriche, che gli scienziati e matematici babilonesi conoscevano da più di millecinquecento anni. Incontrò anche gli artefici di splendide opere artistiche e architettoniche, e gli aspetti matematici di queste meraviglie non potevano sfuggirgli. Durante i suoi viaggi conobbe inoltre le idee religiose e filosofiche dell'Oriente.

Poco dopo essere tornato in Grecia, Pitagora lasciò l'isola di Samo e si trasferì a Crotone, che allora era una colonia greca sulla costa calabra. Vale la pena di ricordare che il filosofo vide sicuramente con i suoi occhi la maggior parte delle sette meraviglie del mondo antico. Una di queste, il tempio di Era, sorgeva proprio a Samo, dove era nato; oggi le rovine del magnifico edificio (delle centinaia di colonne che lo sostenevano, solo una è rimasta in piedi) si trovano a poca distanza dalla moderna cittadina di Pythagorion, che ha preso il nome dall'illustre figlio dell'isola. Pochi chilometri più a nord, al di là di un breve braccio di mare, in una località che oggi appartiene alla Turchia, sorgeva il tempio di Diana a Efeso, un'altra delle sette meraviglie dell'antichità. Non lontano, a sud di Samo, vi era il colosso di Rodi. Le piramidi e la Sfinge si trovano in Egitto e Pitagora potè vederle, così come vide, a Babilonia, i celebri giardini pensili.

A quell'epoca Crotone, con la Calabria e gran parte dell'Italia Meridionale,

apparteneva al mondo greco, o meglio alla Magna Grecia. Questa "grande Grecia" comprendeva colonie sparse per tutto il Mediterraneo Orientale: a esse si aggiunse poi Alessandria d'Egitto, con una popolazione prevalentemente greca (i cui discendenti continuarono ad abitare la città fino all'inizio del XX secolo). Non lontano da Crotone c'erano grotte con oracoli simili a quello di Delfi, del quale si diceva che predicesse la sorte e il futuro di uomini e nazioni.

Il numero è tutto

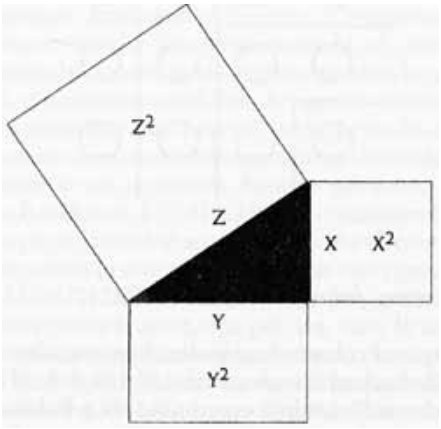
Nelle sterili e dure terre dell'estremo Sud d'Italia, Pitagora fondò una società segreta che si dedicava allo studio dei numeri. Si attribuisce a questa società, i cui membri ebbero il nome collettivo di pitagorici, l'elaborazione di un consistente corpus di scoperte matematiche, svolta sempre in completa segretezza. Si attribuisce ai pitagorici una filosofia riassumibile nella massima secondo cui "il numero è tutto"; essi adoravano i numeri, e riconoscevano loro qualità magiche. Li interessavano i numeri "perfetti"; una delle definizioni di numero perfetto (un concetto che continuò a essere studiato anche nel Medioevo ed è presente in dottrine mistiche come la Cabala ebraica) è quella di numero che è somma dei suoi fattori. L'esempio migliore di numero perfetto, e il più semplice, è il 6, che è il prodotto di 3 per 2 per 1.I suoi fattori sono cioè: $6 = 3 \times 2 \times 1$; ma è da notare che se essi vengono sommati si ottiene di nuovo lo stesso numero: $6 = 3+2 + 1$; in questo senso 6 è "perfetto". Un altro numero perfetto è 28, perché i numeri che lo dividono (senza resto) sono 1,2,4, 7 e 14 e abbiamo che $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

I pitagorici conducevano una vita ascetica ed erano rigorosamente vegetariani, ma non mangiavano le fave che secondo loro somigliavano ai testicoli. Il loro interesse per i numeri assomigliava moltissimo a una religione, e c'erano credenze religiose anche alla base della loro dieta strettamente vegetariana. Non ci è pervenuto alcun documento che risalga all'epoca di Pitagora, ma si è tramandata una vasta letteratura posteriore sul maestro e i suoi seguaci. Pitagora è considerato uno dei più grandi matematici dell'antichità; gli si attribuisce la scoperta del teorema (detto appunto di Pitagora) sui quadrati dei lati di un triangolo rettangolo, che ha forti legami con le terne pitagoriche e in definitiva anche con l'Ultimo Teorema di Fermat, posteriore di duemila anni.

Il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati

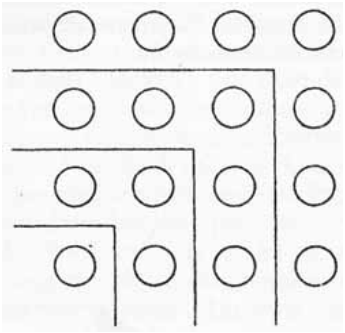
L'origine del teorema è babilonese, dato che a Babilonia si aveva un'idea molto chiara delle terne "pitagoriche". Ma si attribuisce ai pitagorici il merito di avere formulato il problema in termini geometrici, generalizzandolo e andando al di là dei soli numeri naturali (cioè degli interi positivi, senza lo 0). Il Teorema di Pitagora dice

che il quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati dei due lati rimanenti, come mostra la figura.



Quando l'ipotenusa è un numero intero (come 5, il cui quadrato è 25) la soluzione pitagorica generale, in termini di somma di due quadrati, potrà essere data (in qualche caso, non sempre) da numeri interi: qui 4 (il cui quadrato è 16) e 3 (il cui quadrato è 9). Così il Teorema di Pitagora, se applicato a numeri interi, ci fornisce quelle terne pitagoriche che a Babilonia erano già note da un millennio.

Fra l'altro i pitagorici sapevano anche che i numeri quadrati sono somme di successioni di numeri dispari (per esempio 4 = 1 + 3; 9 = 1 + 3+ 5; 16 = 1+3+ 5 + 7 e così via), e rappresentavano questa proprietà disponendo i numeri in una matrice quadrata. Quando a un quadrato già formato si aggiunge, su due lati adiacenti, un numero dispari di punti si forma un nuovo quadrato:



Numeri interi, frazioni e che altro?

Ma i pitagorici conoscevano molte altre cose oltre ai numeri interi e alle frazioni (numeri come 1/2; 1/3; 5/8; 147/1769 eccetera), che nell'antichità erano note sia a Babilonia che in Egitto. Furono loro a scoprire i numeri *irrazionali,* cioè quei numeri che non si possono scrivere come frazioni ma solo come decimali illimitati e aperiodici. È irrazionale per esempio π (3,141592654..), che definisce il rapporto della circonferenza di un cerchio con il suo diametro. Il numero delle cifre di *n* non termina mai: ci vorrebbe tutta l'eternità per scriverlo per esteso, dato che le sue cifre

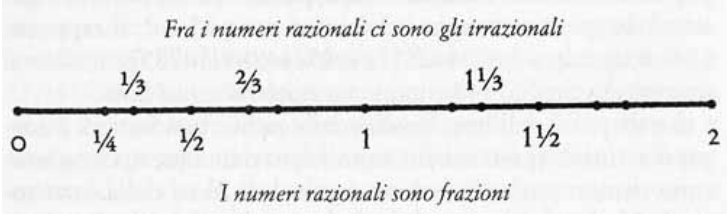
sono infinitamente numerose, e così per scriverlo diciamo semplicemente "π" ma possiamo anche scriverne un numero finito di decimali, come 3,14, o 3,1415, eccetera. Nel nostro secolo si sono usati i computer per calcolare e scrivere oltre un milione di cifre decimali di n, ma questo raramente è necessario. Nel II millennio a.C. i babilonesi e gli egizi conoscevano già, con un'approssimazione più o meno grande, π, e pensavano che valesse all'incirca 3. Questo interesse per *π* era una conseguenza naturale dell'invenzione della ruota. Troviamo π anche in varie misurazioni delle piramidi, e vi si allude perfino nell'Antico Testamento *(1 Re, 7, 23)* là dove si legge della costruzione di un muro circolare. Prendendo il numero di unità fornito per la circonferenza e per il diametro, possiamo concludere che per gli antichi israeliti π era prossimo a 3.

I pitagorici scoprirono che la radice quadrata di 2 è un numero irrazionale. Applicando il Teorema di Pitagora a un triangolo rettangolo con due lati uguali entrambi a 1, ottennero come lunghezza dell'ipotenusa uno strano numero, la radice quadrata di 2, e riuscirono a stabilire che questo numero non era un intero e nemmeno una frazione, un rapporto fra due interi: era un numero con una rappresentazione decimale che non aveva termine e non si ripeteva. Scrivere per intero il numero esatto che è radice di 2 (1,414213562..) richiederebbe l'eternità, come per π*,* perché vi sono infinite cifre che formano una successione unica (e non una successione con ripetizione, come 1,857142857142857142857142857…, che è possibile determinare senza dover scrivere, una per una, tutte le cifre). Ogni numero con una rappresentazione decimale che si ripete (nell'esempio dato sopra, dopo la virgola continua a ripetersi senza fine la successione 857142) è *razionale,* cioè è un numero che si può scrivere anche nella forma *a/b,* perché è il rapporto fra due interi. In questo esempio i due interi sono 13 e 7; il rapporto 13/7 è uguale a 1,857142857142857142857142857.., dove il gruppo di cifre 857142 continua a ripetersi senza fine.

La scoperta dell'irrazionalità della radice quadrata di 2 sorprese e turbò questi zelanti ammiratori dei numeri, che giurarono di non parlarne con nessuno al di fuori della loro società. Ma la notizia trapelò, e la leggenda vuole che lo stesso Pitagora abbia ucciso, facendolo annegare, il membro della setta che divulgò il segreto dell'esistenza di questi strani numeri irrazionali.

I numeri che si trovano sulla linea numerica sono di due tipi distinti: razionali e irrazionali. Se li consideriamo insieme, riempiono tutta la linea e non lasciano vuoti. Sono vicinissimi (infinitesimalmente vicini) l'uno all'altro. Si dice che i numeri razionali sono ovunque densi nei reali. Ogni intorno, ogni intervallo, per quanto piccolo, intorno a un razionale contiene infiniti di questi numeri irrazionali, e, viceversa, intorno a ogni numero irrazionale ci sono infiniti razionali. Entrambi gli insiemi, dei razionali e degli irrazionali, sono infiniti; ma gli irrazionali sono così numerosi che ce ne sono più dei razionali. Questo fu dimostrato nell'Ottocento dal matematico Georg Cantor (1845-1918). All'epoca pochi credettero a Cantor: il suo acerrimo nemico Leopold Kronecker (1823-1891) lo dileggiò e cercò di coprirlo di ridicolo per le sue teorie sulla numerosità dei razionali e degli irrazionali. Kronecker è famoso per avere affermato che "Dio ha creato i numeri interi, il resto è opera dell'uomo"; egli non credeva cioè nemmeno nell'esistenza dei numeri irrazionali

come la radice di 2, e questo oltre duemila anni dopo i pitagorici! Si attribuiscono all'ostilità di Kronecker il fatto che Cantor non riuscisse mai a ottenere una cattedra nella prestigiosa università di Berlino e le sue frequenti crisi di nervi, che lo portarono a finire i suoi giorni in un ospedale psichiatrico. Oggi tutti i matematici sanno che Cantor aveva ragione e che gli irrazionali sono infinitamente più numerosi dei razionali, sebbene entrambi gli insiemi siano infiniti. Ma gli antichi greci lo sapevano?[4]

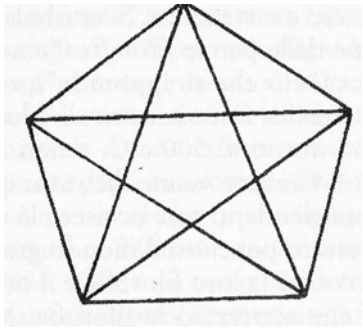


L'eredità dei pitagorici

Un aspetto importante del modo di vivere pitagorico, con le sue regole dietetiche, il culto dei numeri, le riunioni e le cerimonie segrete, stava nell'assumere a proprio fondamento morale gli studi filosofici e matematici. Si attribuisce allo stesso Pitagora la creazione delle parole *filosofia* ("amore della sapienza") e *matematica* ("ciò che si apprende"); egli trasformò la scienza della matematica in una forma di educazione liberale. Pitagora morì intorno al 500 a.C. e non lasciò niente di scritto. Il centro di Crotone venne distrutto quando i sibariti colsero di sorpresa gli adepti e ne uccisero la maggior parte. I superstiti si dispersero per tutto il mondo greco e il Mediterraneo, portando con sé la loro filosofia e il misticismo numerico. Fra coloro che appresero la filosofia della matematica da questi profughi ci fu Filolao di Taranto, che studiò nel nuovo centro fondato dai pitagorici nella sua città. Filolao fu il primo filosofo greco a mettere per iscritto la storia e le teorie della setta pitagorica. Fu proprio dagli scritti di Filolao che Platone apprese la filosofia dei numeri, la cosmologia e le dottrine mistiche dei pitagorici, su cui egli in seguito scrisse a sua volta. Il simbolo della setta pitagorica era la stella a cinque punte inscritta in un pentagono. Le diagonali che formano la stella si intersecano in modo da formare un altro pentagono più piccolo e capovolto rispetto al primo; se si tracciano le diagonali di questo pentagono più piccolo ne viene fuori un altro pentagono ancora, e così via all'infinito. Il pentagono e la stella a cinque punte formata dalle sue diagonali hanno alcune affascinanti proprietà a cui i pitagorici attribuivano un significato mistico. Intersecandosi l'una con l'altra, due qualsiasi di queste diagonali si dividono in due parti disuguali; il

[4] In realtà Cantor andò molto più in là, ipotizzando che *l'ordine* di infinità dei numeri irrazionali seguisse immediatamente quello dei razionali. Egli riteneva cioè che non esistesse un ordine di infinità superiore a quello dei numeri razionali e contemporaneamente inferiore a quello dei numeri irrazionali. Questa tesi prese il nome di Ipotesi del Continuo, e nel Novecento Kurt Godel e Paul Cohen hanno stabilito che è impossibile dimostrarla entro il resto della matematica. L'Ipotesi del Continuo (con alcune riformulazioni equivalenti) è un'affermazione a sé stante, separata dal resto della matematica, e la verità dell'una è indipendente da quella dell'altra. Questa rimane una delle verità più bizzarre di tutti i fondamenti della matematica.

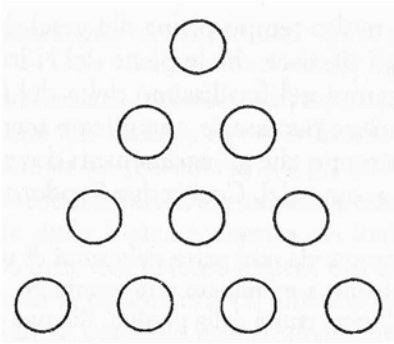
rapporto dell'intera diagonale con il segmento più lungo è uguale al rapporto di quest'ultimo con il segmento più breve, e si ritrovano questi rapporti in tutte le diagonali successive, via via più brevi. Tale rapporto è detto sezione aurea; è un numero irrazionale uguale a 1,618.. Dividendo 1 per questo numero si ottiene la stessa esatta parte decimale senza 1, ovvero 0,618.. La sezione aurea, come vedremo più avanti, è presente nei fenomeni naturali nonché in quelle proporzioni che l'occhio umano trova armoniose, ed è il limite del rapporto fra i famosi numeri di Fibonacci, che incontreremo fra poco.



È possibile ricavare la sezione aurea mediante un'interessante successione di operazioni al calcolatore tascabile. Basterà eseguire la somma 1 + 1, poi dividere 1 per il ricavato, 1/*x*, poi sommare 1, poi ripetere la funzione 1/*x*, poi sommare 1, poi 1/*x* e così via. Il numero che comparirà sullo schermo dovrebbe diventare, alternativamente, 1,618.. e 0,618.. quando questo ripetitivo insieme di operazioni sarà stato eseguito un numero sufficientemente alto di volte; è questa la sezione aurea. Essa è pari alla radice quadrata di 5 meno 1, il tutto diviso 2 [$(\sqrt{5} - 1)/2$]: è così che viene ottenuta geometricamente dal pentagono pitagorico. Poiché questo rapporto non diventa mai un rapporto fra due interi, cioè un numero *razionale,* se ne deduce che anche la radice quadrata di 5 è un numero irrazionale. Torneremo a parlare della sezione aurea in seguito.

I pitagorici scoprirono che anche l'armonia musicale corrisponde a rapporti numerici semplici. Secondo Aristotele essi credevano che ogni cosa nell'universo fosse riconducibile alla scala musicale e ai numeri; erano state proprio l'armonia musicale e le forme geometriche a convincerli che "ogni cosa è numero". Inoltre erano sicuri che i rapporti musicali fondamentali avessero a che fare solo con i numeri 1, 2, 3 e 4, la cui somma è 10; e il 10 è, a sua volta, la base del nostro sistema numerico. I pitagorici rappresentavano il numero 10 sotto forma di un triangolo che chiamavano *tetraktys*:[5]

[5] D. Wells, *Curious and Interesting Numbers,* Penguin Books, London 1987, pag. 81



I pitagorici consideravano sacra la *tetraktys* e giuravano su di essa. Detto per inciso: secondo Aristotele, Ovidio e altri autori classici il 10 fu scelto come base del sistema numerico perché gli uomini hanno dieci dita. Ricordiamo però che i babilonesi usavano un sistema numerico basato sul 60, e che ancor oggi sopravvivono alcune vestigia di altri sistemi; per esempio la parola francese che indica "ottanta" (*quatre-vingt,* cioè "quattro-venti") è un residuo di un arcaico sistema numerico in base 20.

Le corde, il Nilo e la nascita della geometria

Gran parte di quello che sappiamo dell'antica matematica greca viene dagli *Elementi* di Euclide di Alessandria, vissuto intorno al 300 a.C. Si ritiene che i primi due libri degli *Elementi* fossero interamente dedicati all'opera di Pitagora e della sua società segreta. Gli antichi greci coltivavano la matematica per la sua bellezza e si occupavano di figure geometriche astratte; crearono anzi un'intera teoria geometrica, e a scuola si insegna ancora oggi questa teoria, in gran parte immutata. In effetti gli *Elementi* (o ciò che oggi ne rimane) sono considerati il più grande manuale di tutti i tempi.

Erodoto, il grande storico greco dell'antichità, era dell'avviso che la geometria fosse nata nell'antico Egitto intorno al 3000 a.C., cioè molto tempo prima dei greci di Alessandria e dì altre città; egli riferisce che le piene del Nilo distruggevano i confini tra i campi nel fertilissimo delta del fiume, e spiega che questo rendeva necessarie complicate tecniche di rilevazione. Fu a tale scopo che gli agrimensori dovettero elaborare idee e concetti geometrici. Così scrive Erodoto nelle *Storie:*

> Se il fiume portava via una parte dei campi di un uomo, il re mandava qualcuno a esaminare e determinare, per mezzo di misurazioni, l'esatta entità della perdita. Ritengo che la geometria sia stata conosciuta per la prima volta in Egitto, da dove passò poi in Grecia, a causa di questa pratica.[6]

La geometria è lo studio delle forme e delle figure composte di cerchi, linee rette, archi e triangoli e delle loro intersezioni secondo vari angoli. È ovvio che una

[6] C. Boyer, *A History of Mathematics,* Wiley, New York 1968, pag. 9 (trad. it. *Storia della matematica,* A. Mondadori, Milano 1980).

disciplina di questo genere può risultare essenziale per svolgere un lavoro di rilevazione accurato. In effetti i geometri egizi venivano chiamati "stenditori di corde", poiché impiegavano delle corde per determinare le linee *rette* necessarie sia per costruire templi e piramidi, sia per risistemare i confini tra i campi. Ma le origini della geometria potrebbero essere ancora più antiche. Alcuni reperti del Neolitico presentano una notevole congruenza e simmetria di progettazione; questi oggetti potrebbero costituire i precursori della geometria egizia che, dopo molti altri secoli, passò in eredità agli antichi greci. L'interesse dei babilonesi per le aree dei terreni agricoli, che generò in loro l'esigenza di studiare i numeri quadrati e le correlazioni fra di essi, poteva essere condiviso anche dagli antichi egizi, che si trovavano a dover risolvere gli stessi rompicapi agrari ma anche i problemi di costruzione delle loro piramidi. Perciò è possibile che anche gli egizi conoscessero le terne pitagoriche. Ma i greci diedero un contributo diverso alla geometria: la trasformarono in una scienza matematica pura, postularono assiomi e dimostrarono teoremi.

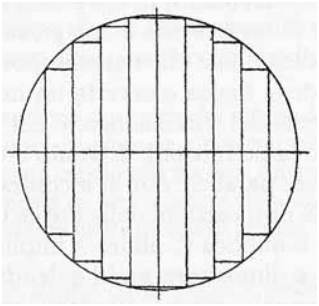
Che cos'è un teorema?

I greci ci hanno lasciato il concetto di *teorema.* Un teorema è una proposizione matematica di cui è data la dimostrazione; la dimostrazione di un teorema è una giustificazione rigorosa della sua veridicità, tale che nessuno possa contestarla se segue le regole della logica e accetta un insieme di *assiomi* proposto come base del sistema logico. Gli assiomi di Euclide comprendono la definizione di punto e di linea e l'asserzione che due linee parallele non si incontrano mai. Seguendo gli assiomi e le proposizioni della logica (per esempio che se A implica B e B implica C, allora A implica C), gli antichi greci riuscirono a dimostrare molti splendidi teoremi sulla geometria di triangoli, cerchi, quadrati, ottagoni, esagoni, pentagoni.

Eureka!. Eureka!.

I grandi matematici greci Eudosso (IV secolo a.C.) e Archimede (III secolo a.C.) estesero questo lavoro sulle figure geometriche fino a un calcolo delle aree che usava quantità infinitesime (vale a dire infinitamente piccole). Eudosso di Cnido (408-355 a.C.) fu amico e allievo di Platone, ma era troppo povero per vivere nell'Accademia di Atene; così abitava nel quartiere portuale del Pireo, più economico, e ogni giorno faceva il pendolare fra l'Accademia e casa sua. Platone, pur non essendo personalmente un matematico, incoraggiava la ricerca matematica, e soprattutto quella degli allievi dotati come Eudosso. Quest'ultimo si recò in Egitto, dove imparò molta geometria, molta altra ne imparò in Grecia, e inventò un "metodo di esaustione" grazie al quale determinava le aree delle figure geometriche per mezzo di quantità infinitesime; per esempio approssimava l'area del cerchio sommando le aree di molti piccoli rettangoli, facili da calcolare come prodotto della base per l'altezza.

Si tratta, sostanzialmente, del metodo che oggi è usato nel calcolo integrale, e i nostri passaggi al limite non sono diversi dal "metodo di esaustione" di Eudosso.



Il più brillante matematico dell'antichità fu sicuramente Archimede (287-212 a.C.), vissuto a Siracusa, in Sicilia. Archimede era figlio dell'astronomo Fidia e parente di Gerone II, tiranno di Siracusa; elaborò come Eudosso dei metodi che precorrevano il calcolo infinitesimale per ricavare aree e volumi. La sua opera anticipa sia il calcolo integrale che quello differenziale (le due parti del calcolo infinitesimale; Archimede aveva una chiara idea di entrambe). Ma nonostante si interessasse soprattutto di matematica pura (numeri, geometria, aree delle figure geometriche e simili) egli è noto anche per i suoi risultati in matematica applicata.

È celebre la storia della sua scoperta di quella che oggi chiamiamo prima legge dell'idrostatica (un corpo immerso in un liquido perde tanto del suo peso, quanto è il peso del liquido che sposta). All'epoca viveva a Siracusa un orefice disonesto, e Gerone chiese al suo amico matematico di trovare un modo di provarne la disonestà. Archimede cominciò a studiare la perdita di peso dei corpi immersi in un liquido usando il suo stesso corpo per gli esperimenti: fece il bagno, prese qualche misura, e quando scoprì la legge corse tutto nudo per le vie di Siracusa gridando: «Eureka, eureka!» (ho trovato, ho trovato!).

Si attribuisce ad Archimede anche la scoperta della vite archimedea, un congegno (ancora usato dagli agricoltori di tutto il mondo) che permette di elevare l'acqua girando una manovella.

Quando il generale romano Marcello attaccò Siracusa nel 214-212 a.C., Gerone chiese l'aiuto del suo illustre parente. Mentre la flotta romana navigava verso la città, Archimede progettò grandi catapulte basate sui suoi studi della leva, e i siracusani furono in grado di difendersi molto bene; ma Marcello raggruppò le sue forze e qualche tempo dopo attaccò la città alle spalle, riuscendo a prenderla di sorpresa. Stavolta Archimede non si accorse nemmeno dell'attacco: stava seduto tranquillo a terra, nella parte alta della città, e disegnava figure geometriche sulla sabbia. Arrivò un soldato romano che calpestò le figure; Archimede saltò in piedi, gridando: «Non rovinare i miei cerchi!», al che il soldato estrasse la spada e uccise il settantacinquenne matematico. Sembra che nel testamento Archimede abbia chiesto di incidere sulla sua pietra tombale una figura geometrica che ammirava molto, una sfera inscritta in un cilindro. Ma la tomba non venne conservata, fu ricoperta di terra, la sua stessa posizione fu dimenticata, finché molto tempo dopo il celebre oratore romano Cicerone la riscoprì e restaurò; poi però le sabbie del tempo la coprirono *di* nuovo. Nel 1963, mentre scavavano le fondamenta di un nuovo albergo nei pressi di

Siracusa, alcuni operai la riportarono alla luce.

Il teorema favorito di Archimede aveva a che fare proprio con una sfera inscritta in un cilindro; il grande matematico lo espose in un libro intitolato Il *metodo* che fu per molto tempo considerato perduto, come la maggior parte dei testi antichi. Nel 1906 lo studioso danese J.L. Heiberg venne a sapere che a Costantinopoli era conservata una pergamena molto sbiadita con un testo di argomento matematico; andò a Costantinopoli e trovò il manoscritto, che comprendeva centottantacinque fogli di pergamena. Uno studio scientifico provò che si trattava di una copia del X secolo del libro di Archimede, che nel XIII secolo era stata ricoperta con preghiere greco-ortodosse.

Alessandria, Egitto greco, 250 d.C. circa

Intorno al 250 d.C. viveva ad Alessandria un matematico di nome Diofanto. Tutto ciò che sappiamo della sua vita è racchiuso in questo problema che fa parte di una silloge poetica, *l'Antologia palatina,* redatta circa un secolo dopo la sua morte.[7]

> Quella che vedi è la tomba che contiene i resti di Diofanto, sepoltura degna di nota: con arte dice le misure della sua vita. La sesta parte della vita Dio gli concesse per la giovinezza. Dopo un altro dodicesimo le sue guance erano barbute. Dopo un altro settimo accese la face di Imene [si sposò], e nel quinto anno accolse un figlio. Ahimé, figlio caro ma sfortunato, metà degli anni del padre aveva quando gelido fato lo colse. Consolò il proprio dolore nei quattro anni restanti. Di', da questa disposizione di numeri, la misura della sua vita.

(Il lettore che risolverà l'equazione implicata dal testo scoprirà che la risposta è 84.)

L'epoca in cui visse Diofanto non è sicura. Possiamo datarla solo basandoci su due fatti interessanti: primo, nei suoi scritti cita Ipsicle, del quale si sa che visse intorno al DO a.C.; secondo, è citato egli stesso da Teone di Alessandria, e conosciamo bene l'epoca in cui visse Teone grazie all'eclissi solare del 16 giugno 364 d.C. Dunque Diofanto visse sicuramente prima del 364 d.C., ma dopo il 150 a.C. Gli studiosi lo collocano, abbastanza arbitrariamente, intorno al 250 d.C.

Diofanto scrisse l'*Arithmetica,* che sviluppava alcuni concetti algebrici e diede origine a un certo tipo di equazione, la cosiddetta equazione diofantea, usata anche nella matematica odierna. Compose quindici volumi, di cui solo sei sono pervenuti fino a noi; gli altri andarono perduti nell'incendio che distrusse la grande biblioteca di Alessandria, la più monumentale collezione di libri dell'antichità. I volumi sopravvissuti furono fra gli ultimi testi greci a essere tradotti; la prima traduzione latina conosciuta fu pubblicata nel 1575, ma Fermat aveva una copia dell'edizione di Claude Bachet (1621).

Fu il problema 8 del volume II, che esamina quale sia il modo di scomporre un

[7] Pubblicato in B. Mazur, «*Number Theory as Gadfly*», cit.

numero quadrato dato nella somma di due . quadrati (il problema pitagorico, la cui soluzione era già nota ai babilonesi duemila anni prima) a indurre Fermat ad annotare a margine il suo famoso Ultimo Teorema. Le conquiste matematiche di Diofanto e dei suoi contemporanei furono le ultime glorie dell'antica Grecia.

Le mille e una notte

Mentre l'Europa era occupata a combattere piccole guerre feudali tra i vassalli di un re o di un principe e quelli di un altro, a sopravvivere alla Peste nera e a organizzare quelle spedizioni dispendiose e spesso mortali che presero il nome di Crociate, gli arabi governavano un impero fiorente che andava dal Medio Oriente alla penisola iberica. Oltre a compiere considerevoli progressi in medicina, in astronomia e nelle arti, gli arabi svilupparono anche l'algebra. Nel 632 d.C. il profeta Maometto fondò uno stato islamico il cui centro era La Mecca, che è ancor oggi il principale luogo santo dell'Islam. Poco tempo dopo le sue armate attaccarono l'Impero bizantino e questa offensiva continuò anche dopo la sua morte, avvenuta a Medina nello stesso anno. Damasco, Gerusalemme e gran parte della Mesopotamia caddero in mano alle forze islamiche, e nel 641 si arrese anche Alessandria, centro della matematica mondiale. Intorno al 750 le guerre, esterne e interne, dell'Islam terminarono e gli arabi marocchini e d'Occidente si riconciliarono con gli arabi orientali.

Baghdad divenne un centro di studi scientifici. Gli arabi assimilarono le idee matematiche e le scoperte fatte in astronomia e in altre scienze dalle popolazioni delle terre assoggettate. A Baghdad furono chiamati dotti iraniani, siriani e alessandrini. Durante il regno del califfo Al Mamun, all'inizio del IX secolo d.C., furono scritte le *Mille e una notte* e vennero tradotte in arabo molte opere greche, tra cui gli *Elementi* di Euclide. Il califfo fondò a Baghdad una Casa della Sapienza fra i cui membri c'era Mohammed Ibn Musa al-Khwarizmi, che avrebbe raggiunto, come Euclide, fama mondiale. Al-Khwarizmi scrisse libri di aritmetica e algebra in cui utilizzava idee e simboli indù per annotare i numeri, e riprendeva vari concetti mesopotamici e il pensiero geometrico di Euclide. La parola "algoritmo" viene da al-Khwarizmi e la parola "algebra" deriva dall'inizio del titolo del suo libro più conosciuto, *Al jabr wa'l muqabalah.* In seguito l'Europa avrebbe appreso da questo libro quel ramo della matematica che chiamiamo algebra. Ci sono delle idee algebriche anche alla radice *dell'Arithmetica* di Diofanto, ma lo *Al jabr* è più vicino all'algebra di oggi e propone soluzioni dirette di equazioni di primo e secondo grado. Il titolo in arabo indica la restaurazione per trasposizione dei termini da un lato all'altro dell'equazione, che oggi è il modo di risolvere le equazioni di primo grado.

L'algebra e la geometria, come tutti i rami della matematica, sono collegate fra di loro; la disciplina che più strettamente le unisce è la geometria algebrica, creata nel nostro secolo. Sarebbero stati proprio i collegamenti fra i diversi settori della matematica e le aree disciplinari che intersecano rami diversi, mettendoli reciprocamente in connessione, a spianare il cammino al lavoro di Wiles sull'enigma

di Fermat, molti secoli dopo.

Il mercante medievale e la sezione aurea

Gli arabi si interessavano a una questione strettamente collegata al problema diofanteo della determinazione di terne pitagoriche; si trattava di individuare queste terne trovando un'area di un triangolo rettangolo che fosse un numero intero. Diversi secoli dopo ritroviamo questo problema alla base del *Liber quadratorum,* scritto nel 1225 da Leonardo Pisano (1180-1250), più noto come Leonardo Fibonacci (cioè "figlio di Bonaccio"). Fibonacci era un mercante internazionale, nato a Pisa ma vissuto anche nell'Africa Settentrionale e a Costantinopoli, che viaggiò in lungo e in largo per tutta la vita, visitando la Provenza, la Sicilia, la Siria, l'Egitto e molti altri paesi che si affacciano sul Mediterraneo. I suoi viaggi e le sue relazioni con l'alta società mediterranea dell'epoca gli permisero di conoscere le idee matematiche degli arabi, oltre alla cultura greco-romana. Quando l'imperatore Federico II visitò Pisa, Fibonacci fu presentato a corte ed entrò a far parte *dell'entourage* imperiale.

Oltre che per il *Liber quadratorum,* Fibonacci è noto anche per un'altra opera scritta in quegli anni, il *Liber abaci.* Un problema sui triangoli pitagorici che troviamo nel suo libro è presente anche in un manoscritto bizantino dell'XI secolo che oggi è conservato nella biblioteca del Palazzo Vecchio di Istanbul. Potrebbe trattarsi di una pura e semplice coincidenza, ma è anche possibile che Fibonacci abbia visto il manoscritto a Costantinopoli, durante i suoi viaggi.

Leonardo è noto soprattutto per la successione numerica detta, in suo onore, di Fibonacci. I numeri in questione hanno origine dal seguente problema del *Liber abaci:*

> Quante coppie di conigli saranno generate in un anno a partire da un'unica coppia, se ogni mese ogni coppia ne genera una nuova che diventa fertile dal secondo mese in poi?

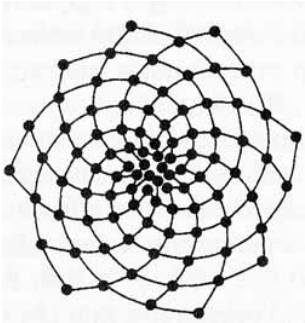
La successione di Fibonacci derivata da questo problema (sotto l'ulteriore ipotesi che ogni coppia figli solo due volte) è tale che ogni termine dopo il primo viene ottenuto sommando i due numeri che lo precedono; la sua parte iniziale è 1,1,2,3, 5,8,13,21,34,55,89,144,233…

Questa successione (che si suppone prosegua anche dopo i dodici mesi del problema) ha proprietà importanti e molto sorprendenti. Un aspetto davvero affascinante è che i rapporti fra due termini consecutivi tendono alla sezione aurea; tali rapporti sono 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55,55/89, 89/144 eccetera; si noti che questi valori si avvicinano sempre più a $(\sqrt{5} - 1)/2$, cioè alla sezione aurea. Possiamo ottenere la sezione aurea anche con un calcolatore, ripetendo, come abbiamo spiegato sopra, le operazioni $1 + x$ e $1/x$ (ricordiamo che il reciproco della sezione aurea è pari alla stessa sezione aurea meno 1).

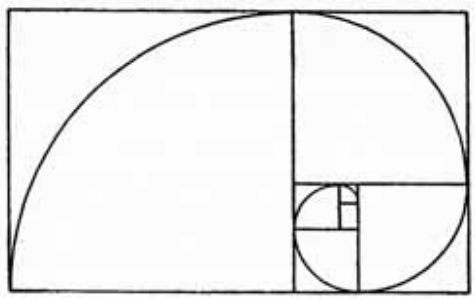
La successione di Fibonacci è onnipresente in natura. Quasi tutti i fiori hanno tre o

cinque o otto o tredici o ventuno o trentaquattro o cinquantacinque o ottantanove petali: i gigli ne hanno tre, i ranuncoli cinque, il *delphinium* spesso ne ha otto, la calendula tredici, l'astro ventuno, e le margherite di solito ne hanno trentaquattro o cinquantacinque o ottantanove.

Troviamo i numeri di Fibonacci anche nei fiori di girasole. Le piccole inflorescenze al centro del girasole, che poi si trasformano in semi, sono disposte lungo due insiemi di spirali, che girano rispettivamente in senso orario e antiorario. Spesso le spirali orientate in senso orario sono trentaquattro e quelle orientate in senso antiorario cinquantacinque; ma a volta sono rispettivamente cinquantacinque e ottantanove, o addirittura ottantanove e centoquarantaquattro, e si tratta sempre di numeri di Fibonacci consecutivi (il cui rapporto si approssima alla sezione aurea). In *Nature's Numbers* Ian Stewart sostiene che quando le spirali vengono svolte, gli angoli fra di esse sono di 137,5 gradi, cioè 360 gradi moltiplicati per 1 meno la sezione aurea, e danno ancora origine, come facciamo vedere sotto, a due numeri di Fibonacci consecutivi per il numero delle spirali orarie e antiorarie.[8]



Se si disegna un rettangolo con i lati che stanno in rapporto aureo fra di loro, lo si può dividere in un quadrato e un altro rettangolo, simile a quello grande nel senso che anche i suoi lati stanno fra loro nel rapporto aureo. A questo punto il rettangolo minore può essere diviso in un quadrato e un rettangolo che ha pure i lati in rapporto aureo, e così via. La curva che passa per vertici consecutivi di questa successione di rettangoli è una spirale che troviamo spesso nelle conchiglie e nella disposizione dei semi del girasole sopra descritta e delle foglie su un ramo.



Questo rettangolo ha proporzioni esteticamente molto gradevoli. La sezione aurea non è presente solo nella natura ma anche nell'arte, come ideale classico della bellezza. C'è qualcosa di divino in essa, tant'è vero che l'odierna Fibonacci Society è

[8] I Stewart, *Nature's Numbers,* Basic Books, New York 1995, pag. 140.

diretta da un sacerdote e ha sede presso il St. Mary's College in California. La società si dedica alla ricerca di esempi di sezione aurea e di numeri di Fibonacci nella natura, in arte e in architettura, basandosi sulla convinzione che il rapporto aureo sia un dono di Dio al mondo. La sezione aurea è presente come ideale di bellezza nel Partenone di Atene; il rapporto fra larghezza e lunghezza nel Partenone corrisponde alla sezione aurea.

Nella Grande Piramide di Giza, costruita molti secoli prima del Partenone, il rapporto fra l'altezza di una faccia e metà di un lato della base corrisponde ancora una volta alla sezione aurea.

Il papiro egizio Rhynd parla di "proporzione sacra", e diverse statue antiche, al pari di molti dipinti rinascimentali, presentano proporzioni uguali alla sezione aurea, o divina proporzione.

La sezione aurea viene ritenuta un ideale di bellezza che vale anche al di là dei fiori e dell'architettura. In una lettera scritta alla società qualche anno fa, un membro della Fibonacci Society spiegava che una persona nota per cercare la sezione aurea un po' ovunque aveva chiesto a diverse coppie di fare un esperimento: il marito avrebbe dovuto misurare l'altezza dell'ombelico della moglie, dividendo poi la misura ottenuta per la statura. Secondo lo scrivente, il risultato si avvicinava a 0,618 per tutte le coppie.

I cosisti

La matematica entrò nell'Europa medievale con le opere di Fibonacci e (attraverso la Spagna, che allora faceva parte del mondo islamico) con quelle di al-Khwarizmi. All'epoca l'algebra era considerata soprattutto un metodo per risolvere equazioni in un'incognita. Oggi chiamiamo *"x"* questa incognita e cerchiamo di risolvere un'equazione per valori qualsiasi della *"x"*. Prendiamo un esempio dei più semplici: $x - 5 = 0$, e usiamo alcune operazioni elementari per trovare il valore della x. Se aggiungiamo 5 a entrambi i membri dell'equazione otteniamo $x - 5 + 5$ a sinistra e $0 + 5$ a destra. Perciò il membro sinistro è *"x"* e il membro destro è 5; vale a dire, $x = 5$. All'epoca di al-Khwarizmi gli arabi chiamavano "cosa" l'incognita; in arabo "cosa" si dice *shay*. Dunque risolvevano equazioni per una *shay* incognita, come abbiamo fatto sopra con *"x"*. Quando queste idee furono importante in Europa il termine arabo *shay* fu tradotto in latino. In latino "cosa" si dice *res;* ma poiché i primi algebristi europei erano italiani, la parola *cosa*[9] si ritrovò associata all'algebra. *Gli* algebristi si occupavano della soluzione di equazioni in una *cosa* incognita, e quindi furono chiamati cosisti.[10]

Come a Babilonia tre millenni e mezzo prima, nel Medioevo e all'inizio del Rinascimento la matematica era usata soprattutto per facilitare il commercio. La società mercantile dell'epoca era sempre più interessata ai suoi problemi professionali

[9] In italiano nel testo [N.d.T.].
[10] M. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat,* 2a ed., Princeton University Press, Princeton 1994, pag. 4.

(i tassi di sconto, i costi, i profitti) che a volte potevano essere formulati come problemi matematici per i quali era necessario risolvere delle equazioni. Tra i cosisti vi furono uomini come Luca Pacioli (1445-1514), Girolamo Cardano (1501-1576), Niccolò Tartaglia (1500-1557) e altri, sempre in concorrenza fra di loro come solutori di problemi al servizio di mercanti e finanzieri. Questi matematici usavano le soluzioni dei problemi più astratti come pubblicità; dato che dovevano contendersi i clienti, spendevano tempo e fatica anche per risolvere questi problemi più difficili, come le equazioni cubiche (equazioni nelle quali l'incognita o "cosa", cioè la nostra *"x",* è elevata alla terza potenza: x^3), così da poter pubblicare i risultati ed essere sempre più ricercati per la soluzione di problemi applicati.

Nel primo Cinquecento Tartaglia scoprì un modo di risolvere le equazioni cubiche e tenne segreto il suo metodo, così da conservare un margine di vantaggio sui concorrenti nel lucroso mercato della soluzione di problemi. Cardano, venuto a sapere che Tartaglia aveva appena vinto una gara con un matematico rivale, gli chiese insistentemente di rivelare il segreto della soluzione di queste equazioni cubiche. Tartaglia gli svelò il suo metodo a condizione che Cardano lo tenesse segreto al resto del mondo. Ma quando, qualche anno dopo, Cardano apprese lo stesso metodo da un altro cosista, Scipione Del Ferro (1456-1526), subito pensò che Tartaglia avesse avuto il suo sistema da questa persona e si sentì autorizzato a divulgare il segreto; così pubblicò il metodo per la soluzione di equazioni cubiche nella sua *Ars magna* del 1545. Tartaglia si sentì tradito, si infuriò con Cardano e da allora dedicò gran parte del suo tempo a denigrare l'ex amico, riuscendo infine a rovinare la sua reputazione.

I cosisti erano considerati matematici di una levatura inferiore a quella degli antichi greci. L'interesse prevalente per i problemi applicati, la ricerca del successo economico e le sterili lotte personali impedivano loro di cercare la bellezza nella matematica e di perseguire una conoscenza fine a se stessa; così essi non elaborarono una teoria matematica generale e astratta. Per una teoria del genere bisognava tornare agli antichi greci, e fu proprio quello che accadde cento anni dopo.

Il Rinascimento: alla ricerca del sapere antico

Erano trascorsi tredici secoli da Diofanto. Il mondo medievale aveva ceduto il posto al Rinascimento, ed era iniziata l'Età Moderna. L'Europa usciva dal Medioevo, si risvegliava assetata di conoscenza, e molti cominciarono a interessarsi ai classici dell'antichità. In un'atmosfera di rinnovata ricerca della conoscenza e dei lumi tutti i libri antichi sopravvissuti furono tradotti in latino, la lingua colta. Claude Bachet, aristocratico francese, era un traduttore fortemente interessato alla matematica; si procurò una copia *dell'Arithmetica* di Diofanto, scritta in greco, la tradusse e la pubblicò a Parigi nel 1621 con il titolo di *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex.* Una copia di questo libro arrivò fino a Fermat.

Il Teorema di Fermat dice che non esistono terne pitagoriche per le potenze superiori alla seconda. Non esistono cioè terne di numeri tali che uno di essi equivalga alla somma degli altri due e che tutti e tre siano cubi perfetti ovvero

potenze quarte, quinte, seste, eccetera di numeri interi. Ma come fece Fermat a formulare questo teorema?

Quadrati, cubi e dimensioni superiori

Un teorema è un'asserzione dimostrata. Fermat affermò di possedere una "dimostrazione veramente meravigliosa", ma nessuno potrebbe chiamare teorema la proposizione da lui asserita senza avere visto e convalidato tale prova. Un'asserzione può essere molto profonda, significativa e importante, ma se non c'è una dimostrazione della sua verità bisognerà chiamarla congettura, o anche ipotesi; solo dopo essere stata dimostrata una congettura può essere chiamata *teorema,* o anche *lemma* se si tratta di un'asserzione (provata) preliminare che porta alla dimostrazione di un teorema più profondo; mentre i risultati (provati) che seguono da un teorema sono detti *corollari.* Fermat fece diverse di queste asserzioni; una di esse era che il numero $2^{2^n} + 1$ è sempre primo, e questa congettura non solo non fu mai provata, per cui non è un teorema, ma anzi venne dimostrato che era *errata.* Lo fece, nel secolo successivo, il grande matematico svizzero Leonhard Euler (1707-1783). Dunque non c'era motivo di credere che l'Ultimo Teorema fosse vero; poteva essere vero così come poteva essere falso. Per dimostrare che era falso sarebbe bastato trovare una terna di numeri interi *a, b* e c elevati a una potenza *n* maggiore di 2 che soddisfacessero la relazione $a^n + b^n = c^n$*;* solo che nessuno l'ha mai trovata (anche se l'ipotesi che una soluzione esistesse avrebbe avuto, in seguito, un ruolo cruciale nei tentativi di dimostrare il teorema), e intorno al 1990 era ormai stato provato che non esistono terne di interi di questo tipo per alcun *n* minore di 4 milioni. Questo però non significava che non si sarebbero mai trovati simili interi; il teorema doveva essere *dimostrato,* per *tutti* i numeri interi e *tutte* le potenze possibili.

Lo stesso Fermat riuscì a dimostrare il suo Ultimo Teorema per $n = 4$, usando un metodo ingegnoso, cui diede il nome di "discesa infinita", col quale provò appunto che non esistevano interi *a, b e c* che soddisfacessero $a^4 + b^4 = c^4$. Si accorse inoltre che se esisteva una soluzione per una qualsiasi potenza *n,* allora ce n'era una per ogni multiplo di *n;* perciò bastava considerare come esponenti i numeri primi (maggiori di 2), cioè quei numeri che non possono essere divisi, dando un risultato intero, da nessun numero a parte 1 e se stessi. I numeri primi più piccoli sono 1, 2, 3,5, 7, 11, 13, 17...; nessuno di essi può essere diviso, dando come risultato un intero, da un numero diverso da 1 e da se stesso. Un esempio di numero non primo è 6, che diviso per 3 dà 2, cioè un intero. Fermat riuscì a dimostrare il suo teorema anche per $n = 3$; Leonhard Euler provò i due casi *di n = 3 e n=4* indipendentemente da Fermat, e nel 1828 Gustav Peter Dirichlet riuscì a dimostrare il caso *d in = 5* (che fu provato anche da Adrien-Marie Legendre nel 1830). Gabriel Lamé e Henri Lebesgue, che corresse Lamé nel 1840, riuscirono a stabilire il teorema per *n = 7.* Dunque duecento anni dopo che Fermat aveva annotato la famosa glossa sul margine del suo Diofanto, la correttezza del suo teorema era stata provata solo per gli esponenti 3,4,5, 6 e 7. Ma per dimostrare il teorema per *qualsiasi* esponente *n* si doveva procedere all'infinito.

C’era bisogno, chiaramente, di una dimostrazione generale che funzionasse per ogni esponente, comunque grande. Tutti i matematici erano in cerca di questa inafferrabile prova generale; ma purtroppo quelle che trovavano erano solo dimostrazioni per singoli esponenti.

L’algorista

L’algorista è una persona che inventa sistemi di calcolo, ovvero algoritmi. Era appunto un algorista il prolifico matematico svizzero Leonhard Euler, del quale si diceva che fosse capace di calcolare con la stessa naturalezza con la quale gli altri respiravano. Ma Euler fu molto di più di una macchina calcolatrice vivente; fu lo scienziato svizzero più produttivo di tutti i tempi, e scrisse un tal numero di volumi di opere matematiche che il governo svizzero ha istituito un fondo speciale proprio per raccogliere tutti i suoi lavori. Si dice che riuscisse a scrivere articoli persino tra una portata e l’altra della cena della sua numerosa famiglia.

Leonhard Euler era nato a Basilea il 15 aprile 1707. L’anno seguente la sua famiglia si trasferì a Riechen, un paesino dove suo padre divenne pastore calvinista. Quando il piccolo Leonhard iniziò a frequentare la scuola, il padre lo incoraggiò a studiare teologia in modo che potesse prendere il suo posto come pastore del villaggio; ma Euler si dimostrava molto promettente in matematica, ed era seguito da Johannes Bernoulli, un matematico svizzero molto noto all’epoca. Daniel e Nicolaus Bernoulli, più giovani di Johannes (i Bernoulli erano una grande famiglia di matematici), divennero buoni amici di Leonhard e convinsero i suoi genitori a permettergli di proseguire su quella strada, perché sarebbe diventato un grande matematico. Tuttavia Leonhard continuò a studiare anche teologia. Sarebbe rimasto un uomo devoto, nell’animo e nei costumi, per tutta la vita.

La ricerca matematica e scientifica a quei tempi non veniva praticata nelle università, come accade invece oggi. Queste istituzioni erano destinate semmai all’insegnamento e non lasciavano molto tempo libero per altre attività. Nel Settecento la ricerca si faceva soprattutto nelle accademie reali, nelle quali i monarchi pagavano i più eminenti scienziati dell’epoca perché sviluppassero nuove conoscenze. Una parte di tali conoscenze era applicativa, e permetteva al governo di migliorare lo stato dell’intera nazione; ma c’era anche una ricerca più “pura”, cioè condotta per se stessa, per il progresso della conoscenza umana. I monarchi finanziavano generosamente questa ricerca, e gli scienziati delle accademie conducevano un’esistenza agiata.

Quando terminò gli studi di matematica, teologia ed ebraico Euler fece domanda per un posto di professore ma, nonostante i grandi risultati che aveva già ottenuto, se la vide respingere. Intanto i suoi due amici Daniel e Nicolaus, che erano stati nominati matematici ricercatori all’Accademia reale di San Pietroburgo, in Russia, erano rimasti in contatto con lui e gli avevano promesso che in un modo o nell’altro sarebbero riusciti a farlo chiamare. Un bel giorno i Bernoulli gli scrissero una lettera in cui gli spiegavano che c’era una possibilità di impiego nella sezione di medicina

dell'Accademia di San Pietroburgo; Euler si mise immediatamente al lavoro, studiando fisiologia e medicina a Basilea. Non erano cose che lo interessassero, ma aveva un bisogno disperato di lavorare e sperava di raggiungere in questo modo i suoi due amici, che in Russia avevano posizioni eccellenti e non erano tenuti a fare nient'altro che le loro ricerche.

Euler trovava la matematica in tutto ciò che studiava, medicina compresa, e lo studio della fisiologia dell'orecchio lo portò ad analizzare matematicamente la propagazione delle onde acustiche. In ogni caso, poco dopo fu invitato a San Pietroburgo e nel 1727 raggiunse i suoi amici; ma alla morte della zarina Caterina, moglie di Pietro il Grande, l'Accademia piombò nel caos perché la grande patrona della ricerca era stata proprio la sovrana. Leonhard Euler, approfittando della confusione, uscì dalla sezione di medicina e riuscì in qualche modo a farsi inserire in quella di matematica, dove era al suo posto. Si tenne al coperto sei anni per impedire che la sua mossa fosse smascherata, sfuggendo ogni relazione sociale perché l'inganno non trapelasse; intanto continuava a lavorare, producendo volumi su volumi di matematica di prim'ordine. Nel 1733 ottenne il posto di primo matematico dell'Accademia. Sembra che fosse capace di lavorare ovunque, e mentre la sua famiglia cresceva spesso si occupava di matematica tenendo un bambino in braccio.

Quando Anna Ivanovna, nipote di Pietro il Grande, divenne zarina di tutte le Russie, ebbe inizio un periodo di terrore, ed Euler si tenne al coperto per altri dieci anni, continuando a lavorare. Fu allora che si occupò di un difficile problema di astronomia per il quale era stato offerto un premio a Parigi. Diversi matematici avevano chiesto un congedo accademico di vari mesi per lavorarci; Euler lo risolse in tre giorni. Ma questo lavoro così intenso gli costò caro, e perse la vista dall'occhio destro.

Passò quindi in Germania, entrando nell'Accademia reale di Prussia; ma con i tedeschi, i quali amavano le lunghe discussioni filosofiche invise a Euler, non si trovava bene, e quando Caterina la Grande di Russia l'invitò a tornare a San Pietroburgo fu ben lieto di accettare. In quei giorni era in visita alla corte di Caterina il filosofo Denis Diderot, che era ateo. La zarina chiese a Euler di discutere dell'esistenza di Dio con Diderot; al filosofo era stato detto che il celebre matematico aveva una prova di tale esistenza. Euler si accostò a Diderot e gli disse con gravità: «Signore, $a + b/n = x$, perciò Dio esiste. Risponda!». Diderot, che non sapeva niente di matematica, rinunciò e tornò subito in Francia.

Durante il secondo soggiorno in Russia, Euler perdette la vista anche dall'altro occhio, ma continuò ugualmente a fare matematica con l'aiuto dei figli, che si occupavano del lavoro materiale di scrittura. La cecità aumentò anzi la sua capacità di eseguire calcoli complicatissimi a mente. Continuò l'attività per altri sedici anni e morì nel 1783, mentre giocava con un nipotino. Si deve a lui gran parte della notazione matematica che usiamo oggi, compresa la lettera i con la quale indichiamo il numero immaginario fondamentale (cioè la radice quadrata di -1). Euler amava moltissimo una formula che per lui era la più bella di tutte e che fece affiggere sopra il portone dell'Accademia:

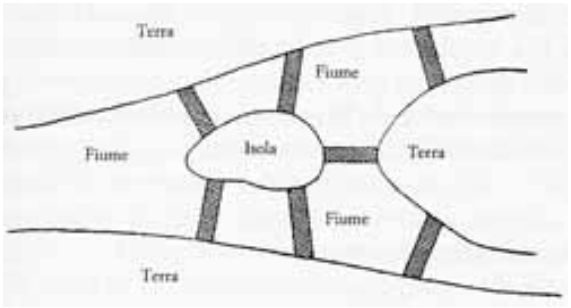
$$e^{i_\pi} + 1 = 0.$$

Questa formula contiene 1 e 0, che sono fondamentali per il nostro sistema numerico, le tre operazioni matematiche di addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza, i due numeri trascendenti *e* e π e infine anche *i,* che è la base dei numeri immaginari. Inoltre essa è gradevole anche sotto il profilo estetico.

I sette ponti di Königsberg

Euler era un visionario matematico formidabile, e il suo lavoro innovatore sui numeri immaginari (e su quella che oggi chiamiamo analisi complessa) non fu la sua unica scoperta. Svolse un'opera pionieristica anche in un campo che nel nostro secolo sarebbe diventato indispensabile per i matematici e per i loro tentativi di risolvere il mistero di Fermat: la topologia, una teoria visiva delle configurazioni spaziali che restano invariate rispetto alle trasformazioni mediante una funzione continua. Si tratta di uno studio delle forme (le quali, a volte, hanno una geometria intricata e sorprendente) esteso al di là del normale mondo tridimensionale, fino a quattro, cinque o più dimensioni. Ci occuperemo di questo affascinante campo quando arriveremo all'approccio moderno al problema di Fermat, perché la topologia (che pure non sembra avere nessun rapporto con l'equazione di Fermat) è molto importante per capirlo.

Il contributo di Euler a questo campo (che in verità anticipa il sorgere della topologia) riguarda il famoso problema dei sette ponti di Königsberg. L'interesse per la topologia prese l'avvio proprio da questo rompicapo. All'epoca di Euler, a Königsberg c'erano sette ponti che attraversavano il fiume Pregel; li possiamo vedere nella figura riportata qui di seguito.



Euler si chiese se fosse possibile attraversare tutti e sette i ponti senza mai passare due volte per lo stesso. Orbene: ciò è impossibile. Un altro problema, studiato in epoca più recente da autori stimolati proprio dall'interesse per quello dei sette ponti, riguarda la colorazione delle mappe. Un cartografo disegna un mappamondo; nella sua carta ogni paese ha un colore diverso da quelli dei paesi confinanti, mentre due paesi o stati completamente separati l'uno dall'altro possono anche avere lo stesso colore. Ci si domanda quale sia il numero minimo di colori indispensabile perché non

avvenga mai che due stati confinanti fra di loro siano colorati allo stesso modo. Si tratta, ovviamente, di un problema generale, non limitato all'aspetto attuale del mappamondo; la vera domanda è: "Date tutte le configurazioni possibili delle mappe di un piano, qual è il numero minimo di colori che possiamo usare?". Se pensiamo agli stati della ex Iugoslavia o del Medio Oriente, con i loro confini così insoliti fra le diverse entità politiche, questo problema generale acquista anche una valenza applicativa.

Sul piano matematico si tratta di un problema topologico. Nel 1852 Francis Guthrie, dovendo colorare una mappa dell'Inghilterra, si chiese quale fosse il numero minimo di colori da usare per le diverse contee e giunse alla conclusione che i colori dovevano essere quattro. Nel 1879 venne anche provato che erano proprio quattro, ma in seguito si scoprì che la dimostrazione era errata; finalmente quasi un secolo dopo, nel 1976, due matematici, Haken e Appel, dimostrarono quello che ormai era noto come problema dei quattro colori. Tuttavia la validità della loro prova è ancora in discussione, perché è stata ottenuta sfruttando la potenza di calcolo di un computer, e non con la sola logica matematica.

Gauss, grande genio tedesco

Nella dimostrazione di Euler per $n = 3$ (cioè per i cubi) vi era un errore, ma fu corretto da Carl Friedrich Gauss (1777-1855). I matematici più famosi dell'epoca erano in maggioranza francesi, ma Gauss, che fu sicuramente il più grande di quegli anni (e forse di tutti i tempi), era tedesco al cento per cento, e addirittura non si recò mai all'estero nemmeno per brevi visite. Era nipote di un contadino poverissimo e figlio di un operaio di Braunschweig. Il padre era duro con lui, ma la madre lo proteggeva e incoraggiava; anche lo zio Friedrich, fratello di sua madre Dorothea, si prendeva cura del piccolo Carl. Questo zio, più agiato dei suoi genitori, si era fatto un nome come tessitore. Un giorno Carl, che aveva tre anni, guardava lo zio che faceva i conti su un libro mastro. «Zio Friedrich!» lo interruppe. «Questo calcolo è sbagliato!» Lo zio rimase molto colpito, e da quel giorno fece tutto il possibile per contribuire all'istruzione e al benessere del giovane genio.

A scuola Gauss era straordinariamente promettente, ma qualche volta la sua condotta lasciava a desiderare; un giorno il maestro gli impose, per punizione, di restare in classe a sommare tutti i numeri da 1 a 100 mentre i compagni uscivano per la ricreazione, ma due minuti dopo Gauss, che aveva dieci anni, usciva anche lui per andare a giocare con i compagni. Il maestro si infuriò. «Carl Friedrich» gli gridò. «Vuoi una punizione più severa? Ti ho detto di stare in classe finché non avevi sommato tutti i numeri!» «Ma li ho sommati» disse il ragazzo «ecco la risposta»; e diede al maestro un foglietto su cui stava scritta la soluzione corretta: 5050. Evidentemente si era reso conto di poter scrivere due righe di 101 numeri ciascuna:

0	1	2	3	...	97	98	99	100
100	99	98	97	...	3	2	2	1

e aveva osservato che in ogni colonna la somma era 100. Non c'era bisogno, dunque, di una lunga addizione: le colonne erano 101, perciò la somma di tutti i numeri era 101 × 100 = 10100. Ora, entrambe le righe davano la somma cercata, quella dei numeri da 1 a 100, e gliene bastava una: perciò la risposta era 5050, la metà di 10100. Era tanto semplice! Ma il maestro imparò la lezione, e non assegnò mai più al giovane Gauss un problema matematico per punizione.

A quindici anni Gauss potè entrare nel collegio di Braunschweig grazie al sostegno finanziario del duca di quella città; questi in seguito lo aiutò anche a frequentare la prestigiosa università di Göttingen, dove il 30 marzo 1796 il giovane matematico scrisse la prima pagina del suo diario. Questo diario aveva solo diciannove pagine, nelle quali Gauss avrebbe enunciato brevemente centoquarantasei importanti e fecondi risultati matematici da lui ottenuti. In seguito si scoprì che quasi tutte le idee matematiche di qualche importanza pubblicate tra la fine del Settecento e l'Ottocento erano state anticipate da qualche annotazione del suo diario inedito, che rimase ignoto finché venne scoperto fra le carte di un suo nipote a Hamlin, nel 1898.

I risultati di Gauss nella teoria dei numeri, comunicati agli altri matematici dell'epoca attraverso una regolare corrispondenza, ebbero grande importanza in tutti i tentativi di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. Molti di tali risultati sono riportati in un libro sulla teoria dei numeri da lui pubblicato in latino nel 1801, quando aveva ventiquattro anni: le *Disquisitiones arithmeticae,* che poi furono tradotte in francese e pubblicate a Parigi nel 1807. L'opera, che Gauss dedicò al suo mecenate, il duca di Braunschweig, suscitò grande interesse, e la sua genialità venne ampiamente riconosciuta.

Gauss era anche un ottimo conoscitore delle lingue classiche. Quando entrò in collegio padroneggiava già bene il latino, e l'interesse per la filologia portò la sua carriera a un momento critico. Doveva studiare lingue o matematica? La svolta venne il 30 marzo 1796: sappiamo dal diario che proprio quel giorno il giovane Gauss decise definitivamente di specializzarsi in matematica. I suoi contributi coprono molti settori matematici e statistici (si deve a lui il metodo dei minimi quadrati, un modo molto ingegnoso di trovare una curva che corrisponda a un certo insieme di dati); tuttavia era convinto che la teoria dei numeri fosse il cuore dell'intera matematica.

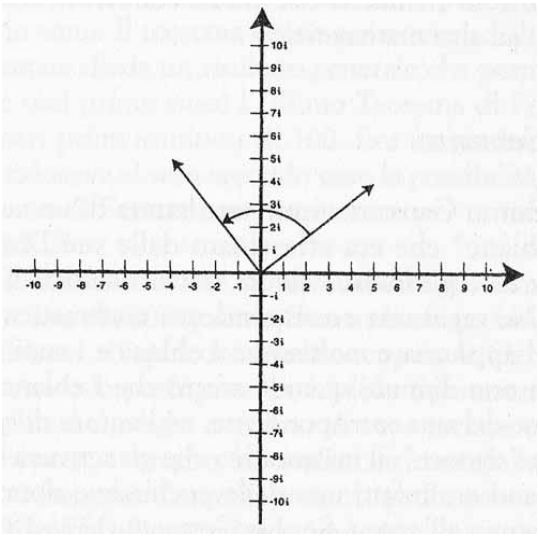
Come mai il massimo genio matematico del mondo non cercò mai di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat? Il 7 marzo 1816 un amico, H.W.M. Olbers, gli scrisse una lettera da Brema per comunicargli che l'Accademia di Parigi offriva un ricco premio a chiunque avesse dimostrato (o confutato) tale proposizione; e sicuramente quel denaro, osservava l'amico, sarebbe stato utile a Gauss, il quale era sostenuto finanziariamente dal duca di Braunschweig e poteva dedicarsi alla matematica senza bisogno di fare altro, ma non era certo ricco. Inoltre, osservava ancora Olbers, nessun altro matematico aveva competenza e capacità paragonabili alle sue; e la lettera si concludeva dicendo: "Mi sembra giusto, caro Gauss, che lei cominci a occuparsi di questa cosa".

Ma Gauss non si lasciò tentare. Forse aveva capito quanto fosse in realtà ingannevole l'Ultimo Teorema di Fermat; forse il grande genio della teoria dei numeri era l'unico matematico europeo a intuire quanto fosse difficile dimostrarlo.

Due settimane dopo spiegava per lettera a Olbers quello che pensava in proposito: “Le sono molto obbligato per la notizia del premio di Parigi, ma le confesso che il Teorema di Fermat, come proposizione isolata, presenta scarsissimo interesse per me, perché potrei facilmente enunciare un gran numero di simili proposizioni, che non potremmo né dimostrare né confutare”. L’ironia della vicenda risiede nel fatto che Gauss diede un grande contributo al ramo della matematica noto come analisi complessa: un settore che comprende i numeri immaginari, sui quali aveva lavorato Euler. E nel Novecento i numeri immaginari avrebbero avuto un ruolo decisivo per comprendere e situare nel suo contesto l’Ultimò Teorema di Fermat.

I numeri immaginari

II campo dei numeri complessi è un campo numerico basato sui numeri reali ordinari e sui cosiddetti numeri immaginari, che Euler conosceva già. I numeri immaginari furono creati da matematici che cercavano di definire numericamente la soluzione di un’equazione del tipo $x^2 + 1 = 0$, che non ha una radice “reale” perché non esiste un numero reale che, elevato al quadrato, dia – 1, cioè il numero che aggiunto a 1 dà per risultato 0. Ma se riuscissimo in qualche modo a definire numericamente la radice quadrata di – 1, questa radice, pur non essendo un numero reale, rappresenterebbe una soluzione dell’equazione. Così la linea numerica venne estesa; si doveva far posto ai numeri immaginari, che sono multipli della radice quadrata di – 1 (denotata da *i).* Gli immaginari vennero sistemati su una linea numerica propria, perpendicolare a quella reale; insieme, le due linee danno il piano complesso, rappresentato sotto, che ha molte proprietà sorprendenti (per esempio certe rotazioni sono moltiplicazioni per *i*).



La moltiplicazione per i determina una rotazione in senso antiorario.

Il piano complesso è il più piccolo campo numerico che contenga le soluzioni di tutte le equazioni quadratiche. Si è dimostrato utilissimo anche sul piano applicativo,

in ingegneria, meccanica dei fluidi e altri campi.

Nel 1811 Gauss, in anticipo di decenni rispetto ai suoi contemporanei, stava studiando il comportamento di certe funzioni nel campo complesso, le cosiddette funzioni analitiche, e scoprì alcune loro sorprendenti proprietà: per esempio che avevano un andamento particolarmente regolare e permettevano calcoli oltremodo semplici. Le funzioni analitiche conservavano anche gli angoli fra linee e archi nel piano, e questo loro aspetto sarebbe diventato molto importante nel Novecento. Alcune di esse, le cosiddette forme modulari, si sarebbero dimostrate decisive per un nuovo approccio al problema di Fermat.

Gauss, modesto com'era, non pubblicò questi importanti risultati ma ne parlò in una lettera all'amico Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). Anni dopo, la teoria riemerse, non più associata al suo nome: così il merito del lavoro su quelle funzioni analitiche che Gauss conosceva tanto bene fu attribuito ad altri matematici.

Sophie Germain

Un bel giorno Gauss ricevette una lettera di un certo "Monsieur Leblanc" che era affascinato dalle sue *Disquisitiones arithmeticae* e gli inviava alcuni nuovi risultati di teoria dei numeri. Ne seguì una corrispondenza matematica che portò Gauss ad apprezzare moltissimo Leblanc e i suoi lavori, e la sua stima non diminuì quando scoprì che Leblanc non era il vero nome del suo corrispondente, né l'autore di quelle lettere era un "signore": il matematico che gli scriveva lettere tanto eloquenti era infatti una delle pochissime donne attive in questo campo all'epoca, Sophie Germain (1776-1831). Quando scoprì l'inganno Gauss le scrisse:

> Ma come descriverle la mia ammirazione e meraviglia nel vedere il mio stimatissimo corrispondente, Monsieur Leblanc, trasformarsi in questo illustre personaggio che offre un esempio talmente brillante di quello che avrei trovato difficile credere..

(Lettera di Gauss a Sophie Germain, scritta a Braunschweig il giorno del suo compleanno, come risulta dall'annotazione francese in calce: "Bronsvic, ce 30 avril 1807, jour de ma naissance".)

Sophie Germain aveva adottato un nome maschile per sfuggire al pregiudizio, molto diffuso all'epoca, nei confronti delle donne scienziate, e per farsi prendere sul serio da Gauss. Fu uno dei più importanti fra i matematici che abbiano cercato di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat, e compì notevoli progressi in questo campo. Il teorema che porta il suo nome, e che le assicurò ampi riconoscimenti, dice che se esiste una soluzione dell'equazione di Fermat per $n = 5$ i tre numeri a, b e c devono essere divisibili per 5. Il risultato di Sophie Germain divide l'Ultimo Teorema di Fermat in due casi: il primo caso riguarda i numeri non divisibili per 5, il secondo quelli che lo sono. Il teorema venne poi esteso ad altre potenze e la Germain diede un risultato generale che permetteva di dimostrare (nel primo caso) l'Ultimo Teorema di Fermat per tutti i numeri primi n minori di 100. Era un risultato importante, che

riduceva al solo secondo caso la possibilità che l'Ultimo Teorema di Fermat non funzionasse per i numeri primi minori di 100.[11]

Sophie Germain dovette rinunciare allo pseudonimo che aveva usato fino al 1807 quando Gauss chiese un favore al suo amico "Leblanc". Napoleone aveva occupato la Germania e i francesi avevano imposto ai tedeschi delle riparazioni di guerra; il contributo che ogni cittadino doveva versare era basato sulle sue sostanze, o meglio, su quelle che erano le sue sostanze secondo i francesi. Come importante professore e astronomo di Göttingen, Gauss si vide imporre un pagamento di 2000 franchi che superava di molto i suoi mezzi. Diversi matematici francesi, amici del grande scienziato, si offrirono di aiutarlo, ma egli non voleva il loro denaro: voleva che qualcuno intercedesse in suo favore a Hannover, presso il generale francese Pernety.

Così scrisse al suo amico Monsieur Leblanc per chiedergli di mettersi in contatto, a suo nome, con il generale francese. Sophie Germain fu ben lieta di accontentarlo, ma a quel punto non poteva più nascondere la propria identità. Gauss fu entusiasta della scoperta, come si vede dalla lettera citata sopra, e la corrispondenza fra i due continuò, affrontando molte altre questioni matematiche. Purtroppo non si incontrarono mai: Sophie Germain morì a Parigi nel 1831, prima che l'università di Göttingen le conferisse la laurea *honoris causa* per cui Gauss l'aveva raccomandata.

Oltre ai suoi contributi alla soluzione dell'Ultimo Teorema di Fermat, Sophie Germain ottenne molti altri risultati. Lavorò alle teorie matematiche dell'acustica e dell'elasticità e in diversi altri settori della matematica pura e applicata; in teoria dei numeri dimostrò anche vari teoremi sui numeri primi che possono portare a equazioni risolubili.

La luminosa cometa del 1811

Gauss ottenne molti risultati importanti in astronomia, determinando le orbite di diversi pianeti, e il 22 agosto 1811 osservò per la prima volta una cometa a malapena visibile nel firmamento. Riuscì a prevedere la sua esatta traiettoria verso il Sole, e quando la cometa fu chiaramente riconoscibile, splendente nel cielo notturno, i popoli europei, superstiziosi e oppressi, videro in essa un segno celeste che annunciava l'imminente caduta di Napoleone. Gauss riconobbe invece nel suo corso l'orbita che aveva previsto con straordinaria precisione; ma anche le masse digiune di scienza avevano la loro parte di ragione, giacché l'anno seguente Napoleone fu sconfitto e dovette ritirarsi dalla Russia. Gauss fu contento; non gli dispiacque vedere l'imperatore sconfitto, dopo che le armate francesi avevano estorto tanto denaro a lui e ai suoi compatrioti.

[11] H.M. Edwards, *Fermat's Last Theorem,* Springer-Verlag, New York 1977, pagg. 61-73.

Il discepolo

Il matematico norvegese Niels Henrik Abel giunse a Parigi nell'ottobre del 1826 e cercò in tutti i modi di conoscere altri matematici (all'epoca Parigi era una Mecca per questi studi). Una delle persone che più lo colpirono fu Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859), prussiano, anch'egli di passaggio a Parigi, che si mostrava attratto dal giovane norvegese, dopo averlo scambiato inizialmente per un compatriota. Abel fu molto colpito dal fatto che Dirichlet avesse provato l'Ultimo Teorema di Fermat per il caso di $n = 5$ e ne parlò in una lettera a un amico, ricordando inoltre che la dimostrazione era stata data pure da Adrien-Marie Legendre (1752-1833), da lui descritto come un signore gentilissimo, ma molto anziano. Per l'esattezza, Legendre aveva dimostrato il Teorema di Fermat per $n = 5$ indipendentemente da Dirichlet, anche se due anni dopo di lui. Era un incidente piuttosto consueto per Legendre: per sua disgrazia, molti dei suoi risultati nascevano già superati da quelli di matematici più giovani.

Dirichlet era discepolo e amico di Gauss. Appena pubblicata, la grande opera del suo maestro, le *Disquisitiones arithmeticae,* era andata subito esaurita, e perfino certi matematici il cui lavoro era strettamente collegato a quello di Gauss non erano in grado di procurarsene una copia. D'altra parte, molti di quelli che possedevano il libro non lo capivano in tutta la sua profondità. Dirichlet ne aveva una copia e se la portava dietro nei suoi numerosi viaggi a Parigi, Roma, e in altre città del continente europeo; dovunque andasse, dormiva con il libro sotto il cuscino. L'opera di Gauss divenne celebre come il libro dei sette sigilli, e Dirichlet, matematico di grande talento, è considerato colui che li aprì tutti e sette. In effetti contribuì più di qualsiasi altro a spiegare e interpretare il libro del suo grande maestro.

Oltre ad ampliare ed esplicitare le *Disquisitiones* e a dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat per il caso di $n = 5$, Dirichlet conseguì anche altri notevoli risultati matematici. Di particolare interesse è quello che riguarda la progressione numerica $a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b...$ e così via, dove a e b sono interi che non hanno divisori comuni, a parte 1 (sono cioè numeri come 2 e 3 o come 3 e 5, ma non come 2 e 4, che hanno il divisore comune 2, o 6 e 9, che hanno il divisore comune 3): Dirichlet provò che questa progressione contiene infiniti numeri primi. L'aspetto stupefacente della sua dimostrazione stava nel fatto che l'aveva ottenuta utilizzando un ramo della matematica che all'epoca sembrava essere lontanissimo dal campo cui questo risultato legittimamente appartiene, vale a dire la teoria dei numeri: aveva fatto ricorso all'analisi, un settore molto importante della matematica che comprende il calcolo infinitesimale. L'analisi si occupa di entità continue, di funzioni definite su di un continuo numerico o sulla linea, lontanissime, almeno all'apparenza, dal mondo degli interi e dei primi, vale a dire dal regno della teoria dei numeri, che è il dominio del discreto.

Sarebbe stato proprio un analogo collegamento fra rami della matematica apparentemente diversi ad aprire la via a quella filosofia moderna che nel nostro secolo ha risolto l'enigma di Fermat. Dirichlet fu un arditissimo pioniere

dell'unificazione di rami della matematica apparentemente molto distanti fra di loro. E l'allievo ereditò anche il posto del maestro: nel 1855, alla morte di Gauss, Dirichlet lasciò la sua prestigiosa cattedra berlinese per accettare l'onore di sostituirlo a Göttingen.

I matematici di Napoleone

Personalmente l'imperatore dei francesi non era un matematico ma amava i cultori di questa scienza, e due di loro gli furono particolarmente vicini: Gaspard Monge (1746-1818) e Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Nel 1798 Napoleone li condusse entrambi con sé nella Campagna d'Egitto perché l'aiutassero a "civilizzare" quell'antichissimo paese.

Fourier era nato a Auxerre in Francia il 21 marzo 1768; ma a otto anni rimase orfano, e il vescovo della sua città lo aiutò a ottenere l'ammissione alla scuola militare. A dodici anni era già una grande promessa e scriveva sermoni per alcuni dignitari ecclesiastici di Parigi (che li facevano passare per farina del loro sacco). Nel 1789 la Rivoluzione francese lo salvò dal sacerdozio obbligato; così divenne professore di matematica, e fervente rivoluzionario. Quando però sopraggiunse il Terrore egli fu disgustato dalla sua brutalità e mise a frutto la propria eloquenza, che aveva formato nel corso degli anni scrivendo sermoni su commissione, per condannarne gli eccessi. Impiegò le sue eccezionali doti oratorie anche per insegnare matematica nelle migliori scuole di Parigi.

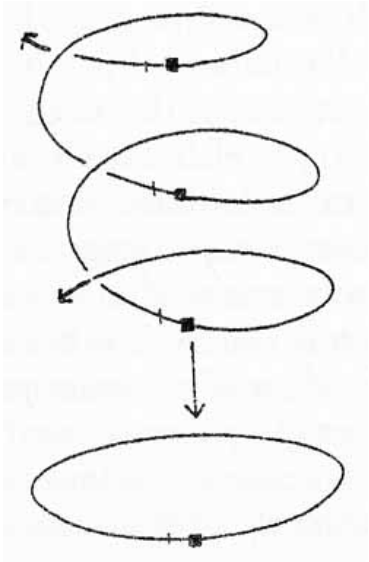
Fourier si interessava di ingegneria, matematica applicata e fisica; all'École Polytechnique svolse ricerche molto approfondite in tutti questi campi e molti dei suoi lavori vennero presentati all'Accademia. La sua reputazione attirò su di lui l'attenzione dello stesso Napoleone, e nel 1798 il Còrso gli propose di salpare sulla sua nave ammiraglia, con la flotta di cinquecento vascelli pronta a partire alla volta dell'Egitto; sarebbe stato arruolato nella Legione della Cultura, che aveva il compito di "donare al popolo d'Egitto tutti i benefici della cultura europea". Si doveva portare agli egizi la civiltà mentre l'armata d'invasione conquistava il loro paese. In Egitto i due matematici fondarono l'Istituto egiziano; Fourier restò nel paese fino al 1802, quando tornò in Francia e fu nominato prefetto della regione di Grenoble. Qui promosse molte opere pubbliche di indubbia utilità, come la bonifica delle paludi e l'eliminazione della malaria. Pur con tutto questo lavoro amministrativo, il matematico divenuto uomo di governo riuscì a trovare il tempo per elaborare le sue migliori idee teoriche; il suo capolavoro fu la teoria matematica del calore, che risponde a una domanda molto importante: "Come si conduce il calore?". Questo lavoro, che assicurò a Fourier il Gran Premio dell'Accademia nel 1812, si basava in parte su esperimenti eseguiti in Egitto qualche anno prima. Secondo alcuni suoi amici furono proprio questi esperimenti (si era anche sottoposto al calore intenso che si formava in una stanza chiusa) a condurlo a una morte prematura a sessantadue anni.

Fourier passò gli ultimi anni di vita a rievocare Napoleone e la sua stretta collaborazione con lui, sia in Egitto che dopo la fuga dall'isola d'Elba. Ma furono le

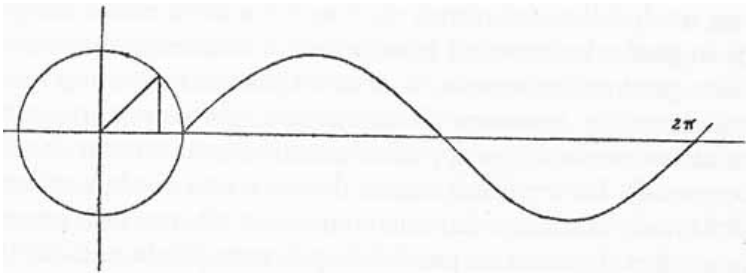
ricerche sul calore a garantirgli l'immortalità, perché lo portarono a creare un'importante teoria delle funzioni periodiche. Una serie di tali funzioni è detta serie di Fourier quando è usata in un certo modo per stimare un'altra funzione.

Le funzioni periodiche

L'esempio più chiaro di funzione periodica è l'orologio. Minuto dopo minuto, la lancetta lunga ruota lentamente e dopo sessanta minuti torna nell'esatta posizione da cui era partita; dopo di che continua e in sessanta minuti esatti torna nuovamente allo stesso punto (naturalmente anche la lancetta corta avrà cambiato posizione con il trascorrere delle ore). La lancetta dei minuti di un orologio è una funzione periodica con un periodo di sessanta minuti esatti. In un certo senso lo spazio formato da tutti i minuti dell'eternità - l'insieme degli infiniti minuti del tempo, da sempre e per sempre - può essere *avvolto a spirale* dalla lancetta lunga sul margine esterno del quadrante dell'orologio:



Prendiamo un altro esempio. In una locomotiva che corre sui binari lo stantuffo che trasferisce la potenza dal motore alla ruota si sposta su e giù lungo quest'ultima, mentre essa gira, e a ogni giro completo torna alla posizione iniziale: dunque anche lo stantuffo è periodico. Se il raggio della ruota del treno è uguale a 1, l'altezza verticale dello stantuffo è definita dalla funzione seno, la funzione trigonometrica elementare che si studia a scuola; il coseno è invece la sua misura orizzontale. Seno e coseno sono entrambi funzioni dell'angolo dello stantuffo con una linea orizzontale che passa per il centro della ruota, come si vede nella figura qui sotto.



Man mano che il treno avanza, l'altezza verticale dello stantuffo percorre la curva a forma di onda che vediamo qui sopra; questa curva è periodica e il suo periodo è di 360 gradi. Prima lo stantuffo è ad altezza 0, poi sale come un'onda fino a raggiungere 1, quindi scende, torna a 0, scende ancora e arriva a – 1 e infine risale, da un'altezza negativa, fino a 0; dopo di che il ciclo ricomincia daccapo.

Ora, Fourier scoprì che la maggior parte delle funzioni può essere stimata, con qualsiasi grado di approssimazione, sommando molte funzioni seno e coseno (in teoria sommandone infinite, se si vuole ottenere una precisione praticamente perfetta). Il suo famoso risultato sulle serie di Fourier è questo. L'espansione di una funzione qualsiasi come somma di seni e coseni è molto utile in quelle numerose applicazioni nelle quali l'espressione matematica effettiva che c'interessa è difficile da studiare ma la somma dei seni e coseni, tutti moltiplicati per fattori diversi, può essere manipolata e calcolata con facilità; e il sistema è particolarmente pratico con i computer. La disciplina matematica nota come analisi numerica riguarda appunto metodi di calcolo del valore delle funzioni e di altre quantità numeriche, che possono essere impiegati con un computer; l'analisi di Fourier, che è una parte importante dell'analisi numerica, consiste di tecniche grazie a cui problemi difficili, spesso privi di una soluzione in forma chiusa (cioè data da un'espressione matematica semplice) vengono studiati usando serie fourieriane di funzioni periodiche. Dopo il contributo pionieristico di Fourier sono state elaborate anche altre espansioni che usano funzioni molto semplici, in genere polinomiali (cioè potenze crescenti di una variabile: quadrati, cubi e via dicendo). Quando il computer calcola la radice quadrata di un numero, perviene al risultato richiesto mediante un'approssimazione basata su uno di questi metodi. Le serie fourieriane di seni e coseni sono utili soprattutto per stimare fenomeni che sono già, per loro natura, la somma di elementi periodici, per esempio la musica: un brano musicale può essere scomposto nelle sue armoniche. Sono esempi di fenomeni periodici semplici le maree, le fasi lunari e le macchie solari.

Le applicazioni delle funzioni periodiche di Fourier ai fenomeni naturali e ai metodi di calcolo sono molto importanti, ma il fatto sorprendente è che le serie e l'analisi di Fourier si sono dimostrate utili anche in matematica pura, cioè in un ambito che non fece mai parte degli interessi del loro creatore. Nel Novecento le serie di Fourier avrebbero assunto un ruolo di rilievo per la teoria dei numeri, come strumento per trasformare elementi di un certo settore della matematica in elementi di un altro, nell'opera di Goro Shimura (la dimostrazione della Congettura di Shimura è stata il momento cruciale di quella dell'Ultimo Teorema di Fermat); e l'estensione delle funzioni periodiche fourieriane al piano complesso avrebbe portato, collegando fra di loro questi due campi della matematica, alla scoperta delle funzioni

automorfiche e delle forme modulari, che hanno pure avuto un effetto cruciale sull'Ultimo Teorema di Fermat attraverso l'opera di un altro matematico francese, Henri Poincaré, agli inizi del secolo.

Una dimostrazione zoppa

Nella riunione del 1° marzo 1847 dell'Accademia di Parigi il matematico Gabriel Lamé (1795-1870) annunciò, eccitatissimo, di avere trovato una dimostrazione generale dell'Ultimo Teorema di Fermat. Fino ad allora si era tentato l'assalto solo a valori specifici della potenza n e il teorema era stato dimostrato, in tutto, per $n = 3,4, 5,7$. Lamé dichiarò di poter proporre un'impostazione generale del problema che funzionava per ogni potenza (il suo metodo consisteva nello scomporre il membro sinistro dell'equazione di Fermat, $x^n + y^n$, in fattori lineari usando i numeri complessi), ma aggiunse modestamente che la gloria non era tutta sua perché il metodo da lui proposto gli era stato comunicato da Joseph Liouville (1809-1882). Senonché, dopo Lamé salì sul podio lo stesso Liouville, che ricusò tutti gli elogi e osservò con molta calma che l'Ultimo Teorema di Fermat non era stato dimostrato perché la fattorizzazione da lui proposta non era unica (esistevano, cioè, molti modi di eseguirla, per cui non c'era una soluzione). Quello di Lamé fu un tentativo ardito (uno dei molti), ma non diede frutti. Tuttavia l'idea della fattorizzazione, cioè della scomposizione dell'equazione in un prodotto di più fattori, sarebbe stata usata ancora.

I numeri ideali

A ritentare la via della fattorizzazione fu Ernst Eduard Kummer (1810-1893), l'uomo che nella sua epoca si avvicinò più di chiunque altro a una soluzione generale del problema di Fermat. Kummer inventò addirittura un'intera teoria matematica, quella dei numeri ideali, per cercare di provare l'Ultimo Teorema.

La madre di Kummer, rimasta vedova quando il figlio aveva tre anni, dovette lavorare sodo per assicurare una buona educazione al ragazzo, che a diciotto anni si iscrisse all'università di Halle, in Germania, per studiare teologia e prepararsi alla carriera ecclesiastica. Ma un professore di matematica intelligente, animato da un sincero entusiasmo per l'algebra e la teoria dei numeri, riuscì a stimolare l'interesse del giovane Kummer per questi argomenti, e la teologia fu ben presto abbandonata per la matematica. Da studente del terzo anno, Kummer risolse un difficile problema per il quale era stato messo in palio un premio, e in seguito a questo successo ottenne, a ventun anni, il dottorato in matematica. Tuttavia non riuscì a trovare un posto all'università, per cui dovette impiegarsi come professore nel suo vecchio liceo. Lì rimase per dieci anni, durante i quali fece molte ricerche che in parte pubblicò e in parte comunicò per lettera a diversi dei più importanti matematici dell'epoca. I suoi amici capivano bene che peccato fosse, per un uomo così dotato, trascorrere la vita a

insegnare la matematica del liceo, e grazie all'aiuto di alcuni eminenti studiosi Kummer ottenne una cattedra all'università di Breslavia. Un anno dopo, nel 1855, Gauss morì; Dirichlet prese il suo posto a Göttingen, lasciando libera la propria cattedra alla prestigiosa università di Berlino, e per sostituirlo fu scelto Kummer, che tenne la cattedra fino alla pensione.

Kummer lavorò su di un ampio ventaglio di problemi matematici, dai più astratti ai più applicativi, compresi gli usi bellici della matematica; ma fu il suo lungo lavoro sull'Ultimo Teorema di Fermat a dargli la fama. Il matematico francese Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) aveva creduto più volte di avere scoperto una soluzione generale del problema di Fermat: ma a ogni tentativo l'inquieto e disattento Cauchy si rendeva conto, dopo un certo tempo, che la questione era ben più vasta di quanto avesse pensato. I campi numerici con i quali lavorava non avevano mai le proprietà richieste, e Cauchy abbandonò il problema, mettendosi a lavorare ad altre cose.

Per Kummer l'Ultimo Teorema di Fermat divenne un'ossessione, e i suoi tentativi di soluzione lo avviarono lungo lo stesso sterile percorso di Cauchy; ma invece di rinunciare a ogni speranza quando si accorse che i campi numerici sui quali lavorava non possedevano certe proprietà, *inventò* nuovi numeri, dotati delle proprietà di cui aveva bisogno, e li chiamò "numeri ideali". Sviluppò così, partendo da zero, una teoria completamente nuova che usò nei suoi tentativi di provare l'Ultimo Teorema, e a un certo punto credette anche di avere finalmente in mano una dimostrazione generale: ma purtroppo ciò che aveva trovato era sempre meno di quanto gli occorreva.

Tuttavia l'attacco di Kummer al problema di Fermat conseguì progressi davvero enormi, perché lavorando con i numeri ideali era possibile dimostrare l'Ultimo Teorema per una classe di esponenti n (ovviamente primi) molto estesa. Kummer riuscì infatti a provare che l'Ultimo Teorema era vero per un'infinità di esponenti, e precisamente per tutti quelli divisibili per qualche numero primo "regolare"; ma non riuscì a domare i primi "irregolari". Ora, i soli numeri primi "irregolari" minori di 100 sono 37, 59 e 67; Kummer trattò questi tre numeri a parte e alla fine dimostrò il teorema anche per essi. Nella seconda metà dell'Ottocento, grazie agli incredibili progressi conseguiti da Kummer, si sapeva ormai che l'Ultimo Teorema di Fermat era vero per tutti gli esponenti minori di $n = 100$, nonché per gli infiniti multipli dei primi compresi in questo ambito. Era un grandissimo risultato, anche se non era ancora una dimostrazione generale e non copriva infiniti altri numeri per i quali non si sapeva se il teorema fosse vero.

Nel 1816 l'Accademia francese delle scienze aveva offerto un premio a chiunque avesse dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat; nel 1850 aveva rinnovato l'offerta di 3000 franchi e di una medaglia d'oro al matematico che l'avesse provato; ma nel 1856 decise di non ripetere l'offerta perché non sembrava probabile che una soluzione del problema di Fermat fosse imminente e assegnò invece il premio a Eduard Kummer "per le sue belle ricerche sui numeri complessi composti di interi e radici dell'unità". Lo studioso tedesco ottenne così un premio per il quale non aveva mai nemmeno concorso.

Kummer proseguì il suo incessante lavoro intorno all'Ultimo Teorema di Fermat, interrompendo le ricerche solo nel 1874. Svolse anche delle ricerche pionieristiche

sulla geometria dello spazio quadridimensionale, e oggi alcuni dei suoi risultati sono utilizzati nella fisica moderna: per l'esattezza, nella meccanica quantistica. Morì d'influenza a oltre ottant'anni, nel 1893.

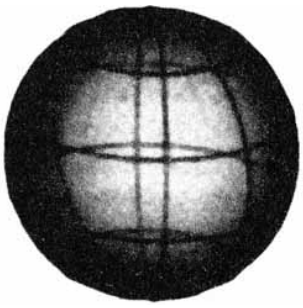
I contributi di Kummer sui numeri ideali sono apprezzati dai matematici ancor più dei progressi che effettivamente ottenne, usando questi numeri, nella soluzione del problema di Fermat. Il fatto che questa notevole teoria sia stata ispirata dal tentativo di dimostrare l'Ultimo Teorema mostra appunto come, cercando di risolvere un determinato problema, possa accadere di creare teorie completamente nuove. In effetti dalla teoria kummeriana dei numeri ideali è scaturito il concetto moderno di "ideale", che nel Novecento ha avuto grande importanza nel lavoro di Wiles e di altri matematici sul Teorema di Fermat.

Un altro premio

Nel 1908 in Germania venne bandito il premio Wolfskehl, che consisteva in una somma di 100000 marchi a disposizione di chi avesse presentato una dimostrazione generale dell'Ultimo Teorema di Fermat. Il primo anno furono inviate seicentoventuno "soluzioni" che risultarono tutte errate; l'anno dopo ne arrivarono altre migliaia, che fecero la stessa fine. Negli anni venti l'inflazione tedesca ridusse a zero il valore effettivo dei 100000 marchi, ma le false dimostrazioni dell'Ultimo Teorema di Fermat continuarono ad affluire in grande quantità.

La geometria senza Euclide

Nell'Ottocento la matematica cominciò a prendere vie nuove. L'ungherese Janos Bolyai (1802-1860) e il russo Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856) cambiarono il volto della geometria, sbarazzandosi dell'assioma euclideo che asserisce l'unicità della parallela a una retta data per un punto a essa esterno.



Essi riuscirono, indipendentemente l'uno dall'altro, a creare un universo geometrico che, pur conservando molte proprietà euclidee, ammetteva che due rette parallele si incontrassero all'infinito. La nuova geometria che nacque in questo modo può essere visualizzata, ad esempio, per mezzo di una sfera come il globo terrestre.

All'altezza dell'equatore due meridiani sono paralleli l'uno all'altro; ma in realtà, se li seguiamo fino al Polo Nord, vediamo che lì si incontrano. La nuova geometria permise di risolvere molti problemi, e di spiegare situazioni che fino ad allora apparivano misteriose e prive di soluzione.

Bellezza e tragedia

L'algebra astratta, che deriva dall'algebra ordinaria (quella che si insegna a scuola come metodo per risolvere le equazioni), è stata creata nell'Ottocento. In questo campo emerge sulle altre la bellissima teoria di Évariste Galois.

Galois nacque nel 1811 a Bourg-la-Reine, un piccolo centro nei dintorni di Parigi. Suo padre, che di quel paesino era il sindaco, era animato da idee repubblicane; così il giovane Evariste fu educato agli ideali di democrazia e libertà. Purtroppo a quell'epoca la Francia, o almeno gran parte di essa, stava andando in direzione opposta. La Rivoluzione si era conclusa, Napoleone era stato sconfitto: eppure il sogno di libertà, uguaglianza e fraternità non era stato realizzato e i realisti stavano vivendo il loro grande ritorno in Francia, mentre un Borbone era nuovamente re dei francesi (sia pur sottostando all'obbligo di governare insieme ai rappresentanti del popolo).

La vita di Evariste era completamente pervasa dagli alti ideali della Rivoluzione. Era un buon ideologo, e pronunciò alcuni appassionati discorsi davanti a un pubblico repubblicano. Ma come matematico era un genio dalle straordinarie capacità; negli anni dell'adolescenza assimilò tutte le teorie dell'algebra e delle equazioni note ai matematici più competenti dell'epoca, e mentre era ancora a scuola sviluppò un intero sistema che oggi è noto come Teoria di Galois. Purtroppo non ottenne alcun riconoscimento durante la sua vita, che fu tragicamente breve. In collegio stava alzato la notte, mentre gli altri dormivano, per scrivere la sua teoria; la spedì al presidente dell'Accademia francese delle scienze, che era Augustin-Louis Cauchy, sperando che l'aiutasse a pubblicarla, ma Cauchy era non solo indaffaratissimo, ma anche arrogante e disattento. Così il brillante manoscritto di Galois finì nel cestino senza essere stato letto.

Galois fece un altro tentativo, ma con lo stesso risultato; intanto non aveva superato l'esame di ammissione all'École Polytechnique, dove studiava la maggioranza dei matematici francesi destinati alla celebrità. Aveva l'abitudine di sviluppare le sue teorie mentalmente, senza mai prendere appunti o scrivere niente finché non aveva ottenuto risultati sicuri; così si concentrava sulle *idee* più che sui dettagli, per i quali aveva scarsa pazienza e ancor meno interesse. Ciò che l'appassionava era la grande idea, la bellezza della teoria generale. Così, quando si trattava di sostenere un esame davanti a una lavagna, non dava il meglio di sé, e fu per questo che fallì due volte l'esame per farsi ammettere alla scuola dei suoi sogni: entrambe le volte, alla lavagna non scrisse correttamente quello che doveva, e quando gli chiesero certi particolari ai quali non dava nessuna importanza si innervosì. Fu una tragedia che un giovane di incredibile intelligenza fosse interrogato da

esaminatori molto meno capaci di lui, i quali non capirono la profondità delle sue idee e presero per ignoranza la sua riluttanza a fornire dettagli banali. Quando capì che il secondo tentativo, e l'ultimo possibile, stava per andare male e che non sarebbe mai stato ammesso all'École Polytechnique, Galois tirò il cancellino in faccia all'esaminatore.

Così dovette accontentarsi di una seconda scelta, l'École Normale, ma non se la passò bene nemmeno lì. Suo padre intanto era caduto vittima di un intrigo politico di paese quando un prete senza scrupoli aveva messo in circolazione dei versi pornografici apocrifi attribuendoli al sindaco repubblicano. Dopo mesi e mesi di questa persecuzione Galois padre perse la fiducia in se stesso: convinto che tutto il mondo ce l'avesse con lui, si estraniò sempre di più dalla realtà, si trasferì a Parigi e lì, in un appartamento non lontano dal luogo dove studiava il figlio, si uccise. Il giovane Galois non si riebbe mai da questa tragedia. Ossessionato dalla causa perduta della rivoluzione del 1830, scrisse una sferzante lettera di critica contro il direttore della sua scuola, che considerava un apologeta dei realisti e dei clericali; l'ispirazione gli venne dopo tre giorni di tumulti durante i quali gli studenti di tutta Parigi si erano ribellati al regime, ma Galois e i suoi compagni erano rimasti rinchiusi dentro la scuola. Non potevano scalare la recinzione, che era troppo alta. Galois, furioso, inviò questa lettera al vetriolo in cui criticava il direttore alla *Gazette des Écoles,* e così si fece espellere. Tuttavia non si lasciò intimidire: scrisse una seconda lettera alla *Gazette,* chiedendo agli ex compagni di scuola di scegliere l'onore e la coscienza. Ma nessuno rispose.

Una volta espulso, cominciò a cercare lezioni private di matematica; voleva insegnare, a diciannove anni e fuori del sistema scolastico, le sue teorie. Ma non riuscì a trovare allievi: le sue teorie erano troppo avanzate e lui era molto in anticipo sui tempi.

Il futuro era incerto, e Galois non aveva più la possibilità di fare studi decenti; così, disperato, si arruolò come artigliere nella Guardia nazionale francese, che un tempo era stata guidata da Lafayette, e nella quale c'erano molti elementi liberali, vicini alla sua filosofia politica. Durante il servizio, Galois fece un ultimo tentativo di pubblicare la sua opera matematica: scrisse un articolo sulla soluzione generale delle equazioni, vale a dire quella che oggi è nota come Teoria di Galois (ed è bellissima), e lo spedì a Siméon-Denis Poisson (1781-1840) dell'Accademia francese delle scienze. Poisson lesse l'articolo, ma lo trovò "incomprensibile": ancora una volta, un ragazzo di diciannove anni era tanto più avanti dei matematici francesi adulti dell'epoca che le sue nuove ed eleganti teorie passavano sopra le loro teste. Il giovane decise allora di abbandonare la matematica e di fare il rivoluzionario a tempo pieno, affermando che se per interessare la gente alla rivoluzione era necessario un corpo, avrebbe donato il proprio.

Il 9 marzo 1831 duecento giovani repubblicani tennero un banchetto durante il quale protestarono contro l'ordine, emanato dal re, di sciogliere l'artiglieria della Guardia nazionale; si brindò alla Rivoluzione francese e ai suoi eroi, nonché alla nuova rivoluzione del 1830. Galois si alzò e propose un brindisi a Luigi Filippo duca di Orléans, il re dei francesi; e mentre faceva il suo nome, tenendo in mano il bicchiere, con l'altra mano alzò un coltello a serramanico aperto. Il gesto fu

interpretato come una minaccia alla vita del re e ne nacque una rissa. Il giorno dopo Galois fu arrestato.

Durante il processo per minaccia alla persona del re, il difensore affermò che Galois, mentre alzava il coltello, aveva detto: «A Luigi Filippo, se dovesse tradire»; alcuni amici, anch'essi artiglieri, che erano stati presenti, confermarono e la giuria dichiarò innocente l'imputato. Galois andò a riprendersi il coltello dal tavolo dove erano raccolte le prove, lo chiuse, se lo mise in tasca e lasciò il tribunale da uomo libero. Ma non rimase libero a lungo: un mese dopo fu arrestato come repubblicano pericoloso e tenuto in carcere senza un'imputazione precisa mentre le autorità cercavano di muovergli un'accusa credibile. Alla fine la trovarono: aveva indossato l'uniforme del corpo dell'artiglieria, ormai disciolto. Galois fu processato per questo reato e condannato a sei mesi di carcere, e i realisti ebbero finalmente il piacere di mettere al fresco un ventenne che consideravano un pericoloso nemico del regime; poco tempo dopo tuttavia il giovane ottenne la semilibertà sulla parola. Non è ben chiaro che cosa sia accaduto a quel punto; comunque Galois conobbe una ragazza e se ne innamorò. Secondo alcuni la cosa era stata combinata dai suoi nemici realisti, che volevano mettere fine una volta per sempre alle sue attività rivoluzionarie. In ogni caso la ragazza con la quale aveva a che fare era di mediocre virtù (*une coquette de bas étage),* e appena fu divenuta sua amante spuntò fuori un realista deciso a "salvare il suo onore" e sfidò Galois a duello. Al giovane matematico non fu lasciata via d'uscita; cercò in tutti i modi di convincere l'avversario a rinunciare al duello, ma invano.

La notte prima dello scontro Galois scrisse agli amici diverse lettere che confermano la teoria secondo cui sarebbe rimasto vittima di un complotto dei realisti; affermò che due realisti l'avevano sfidato e gli avevano ingiunto, sul suo onore, di non parlare del duello ai suoi amici repubblicani. "Muoio vittima di una donnaccia infame, e la mia vita si spegne in un'ignobile zuffa. Ah, perché morire per una cosa così volgare, così spregevole!" Ma quasi tutta quell'ultima notte prima del duello Galois la passò a scrivere per esteso la sua teoria matematica, che spedì all'amico Auguste Chevalier. All'alba del 30 maggio 1832 affrontò il suo sfidante in un campo deserto; si prese una pallottola nello stomaco e fu abbandonato, solo e agonizzante, sul terreno. Nessuno si preoccupò di chiamare un medico. Finalmente un contadino lo trovò e lo portò in ospedale, dove morì la mattina successiva. Aveva vent'anni. Nel 1846 il matematico Joseph Liouville curò la pubblicazione della sua elegante teoria in una rivista. Le idee di Galois avrebbero reso possibile il passo cruciale del metodo usato, centocinquant'anni dopo, per l'attacco all'Ultimo Teorema di Fermat.

Un'altra vittima

La disattenzione e l'arroganza di Cauchy rovinarono la vita ad almeno un altro brillante matematico, Niels Henrik Abel (1802-1829), figlio del pastore luterano del villaggio norvegese di Finnöy. Quando Abel aveva sedici anni, un insegnante lo incoraggiò a leggere le famose *Disquisitiones* di Gauss, e il ragazzo riuscì addirittura

a colmare delle lacune nelle dimostrazioni di alcuni teoremi. Due anni dopo però suo padre morì, e Abel dovette rallentare gli studi matematici e dedicare la maggior parte delle sue energie a mantenere la famiglia; ma nonostante le grandi difficoltà che doveva affrontare, riusciva ancora a svolgere un po' di ricerca, e a diciannove anni fece una scoperta importante. Nel 1824 pubblicò un articolo nel quale dimostrava che non era possibile una soluzione generale delle equazioni di quinto grado: aveva cioè risolto uno dei più famosi problemi dell'epoca. Ma al giovane, per quanto dotato, non era ancora stato offerto un posto all'università, di cui pure avrebbe avuto un disperato bisogno per mantenere la famiglia; così mandò un lavoro a Cauchy perché lo giudicasse e se possibile lo recensisse positivamente, facendolo pubblicare. L'articolo da lui spedito era straordinariamente ampio e fecondo, ma Cauchy lo perse; quando, anni dopo, lo scritto vide finalmente le stampe era troppo tardi perché potesse essere d'aiuto a Abel, morto nel 1829 per una tubercolosi causata dalla povertà e dalla fatica di mantenere la famiglia in condizioni durissime. Due giorni dopo la morte arrivò una lettera in cui lo si informava che era stato assunto come professore all'università di Berlino.

Il concetto di gruppo abeliano (oggi il termine è trattato come se fosse una parola unica e indicato con la "a" minuscola) riveste una straordinaria importanza nell'algebra moderna e costituisce un elemento cruciale del trattamento contemporaneo del problema di Fermat. Sono abeliani quei gruppi nei quali l'ordine delle operazioni matematiche può essere invertito senza modificare il risultato. Una varietà abeliana è un'entità geometrica ancora più astratta, anch'essa molto importante nell'approccio moderno alla soluzione dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Gli ideali di Dedekind

L'eredità di Carl Friedrich Gauss mantenne la sua fertile vitalità per tutto l'Ottocento. Uno dei più notevoli fra i suoi eredi matematici fu Richard Dedekind (1831-1916), nato a Braunschweig, la città del suo grande maestro. Da bambino Dedekind, a differenza di Gauss, non mostrò né grandi capacità né profondi interessi matematici; lo attraevano di più la fisica e la chimica, e per lui la matematica era un'ancella delle scienze. Ma a diciassette anni entrò nel collegio in cui si era formato il grande Gauss, il Carolinum, e il suo futuro cambiò; cominciò a interessarsi di matematica e portò avanti questo interesse anche a Göttingen, dove insegnava Gauss. Nel 1852, a ventun anni, Dedekind conseguì il dottorato sotto la guida di Gauss: il maestro trovò "completamente soddisfacente" la dissertazione dell'allievo sul calcolo infinitesimale. Ma non era un grandissimo complimento, e infatti il genio matematico di Dedekind non aveva ancora cominciato a manifestarsi.

Nel 1854 Dedekind ottenne un insegnamento a Göttingen. Nel 1855, quando Gauss morì e Dirichlet arrivò da Berlino per prendere il suo posto, Dedekind prese a frequentare tutte le sue lezioni e curò la pubblicazione del suo pionieristico trattato sulla teoria dei numeri, con l'aggiunta di un supplemento basato su lavori suoi; tale supplemento esponeva a grandi linee la teoria dedekindiana dei numeri algebrici. Si

dicono algebrici quei numeri che sono soluzioni di equazioni algebriche; comprendono i razionali, le radici *n*-esime (per qualsiasi esponente intero *n)* degli interi e i loro multipli. I campi numerici algebrici sono molto importanti nello studio dell'equazione di Fermat perché nascono dalla soluzione di vari tipi di equazione. Dedekind sviluppò dunque un settore significativo della teoria dei numeri.

Il principale contributo di Dedekind all'approccio moderno all'Ultimo Teorema di Fermat fu la creazione della teoria degli ideali, ottenuti per astrazione dai numeri ideali di Kummer. Cento anni dopo che Dedekind li aveva creati, gli ideali ispirarono Barry Mazur, e il lavoro di Mazur sarebbe stato sfruttato da Andrew Wiles.

Nell'anno accademico 1857-58 Dedekind tenne il primo corso universitario sulla Teoria di Galois. Il suo modo di intendere la matematica era molto astratto; fu lui a innalzare la teoria dei gruppi al livello di astrazione a cui è intesa e insegnata oggi e che ha reso possibile l'approccio novecentesco al problema di Fermat. Il pionieristico corso di Dedekind sulle teorie create da Galois fu un grande passo in questa direzione. Lo frequentarono due studenti.

Poi la carriera di Dedekind ebbe una strana svolta. Lasciò Göttingen per un posto a Zurigo e poi, dopo altri cinque anni, nel 1862, tornò a Braunschweig, dove insegnò alla scuola superiore per cinquant'anni. Nessuno ha mai saputo spiegare perché un matematico così brillante, che aveva portato l'algebra a un livello di astrazione e generalità incredibilmente elevato, abbia improvvisamente abbandonato una delle cattedre più prestigiose di tutte le università europee per insegnare in un oscuro liceo. Dedekind non si sposò mai e visse molti anni con la sorella. Morì nel 1916, e conservò fino all'ultimo giorno un'intelligenza lucida e attiva.

Fin de siècle

Alla fine dell'Ottocento viveva in Francia un matematico che mostrava grandi capacità in una sorprendente varietà di campi; anzi le conoscenze di Henri Poincaré (1854-1912) spaziavano anche al di là della matematica. Nel 1902, all'apice della fama, Poincaré cominciò a scrivere dei libri divulgativi sulla matematica, ed era molto frequente vedere quei volumetti, letti da gente di tutte le età, nei caffè e nei parchi di Parigi.

Poincaré era nato in una famiglia di successo. Un suo cugino, Raymond, divenne presidente della Repubblica durante la prima guerra mondiale, ma anche altri parenti furono uomini di governo o funzionari di grado elevato.

Henri dimostrò fin dai primi anni una memoria straordinaria: poteva recitare una pagina a piacere di ogni libro che leggeva. Ma anche la sua distrazione era leggendaria. Una volta un matematico finlandese venne a Parigi proprio per conoscerlo e discutere con lui alcuni problemi scientifici, ma dovette aspettare tre ore in anticamera mentre il distrattissimo padrone di casa passeggiava su e giù per lo studio (un'abitudine che mantenne tutta la vita). Finalmente Poincaré si affacciò in anticamera e disse: «Signore, lei mi disturba!», al che il visitatore se ne andò senza salutare e non si fece più vedere a Parigi.

La grande intelligenza di Poincaré venne notata quando frequentava la scuola elementare; ma poiché era un ingegno universale, una specie di uomo del Rinascimento in formazione, le sue attitudini specificamente matematiche non si manifestarono subito. In tenera età si distingueva soprattutto per il bello scrivere, e un suo maestro che aveva riconosciuto questa sua capacità ed era solito incoraggiarlo, conservava i suoi temi. A un certo punto però, preoccupato, dovette pregare il giovane genio: «Non essere così bravo, per piacere. Cerca di essere più normale». Aveva delle buone ragioni per dargli questo consiglio; evidentemente gli educatori francesi avevano imparato qualcosa dalle sfortune di Galois mezzo secolo prima, e si erano accorti che spesso gli studenti molto dotati, messi di fronte a esaminatori mediocri, andavano male. Il suo maestro temeva sinceramente che Poincaré potesse essere bocciato proprio perché era così intelligente. Inoltre era già distratto da bambino, e spesso saltava i pasti perché non ricordava se aveva mangiato o no.

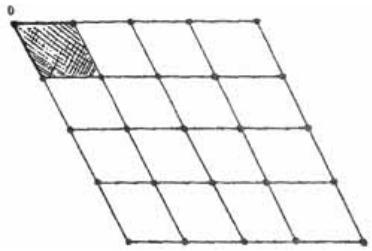
Da piccolo Poincaré si interessava ai classici, e imparò a scrivere bene; da adolescente cominciò a occuparsi di matematica, e raggiunse immediatamente l'eccellenza. Studiava un problema solo mentalmente, passeggiando per la stanza, poi si sedeva e scriveva la soluzione in un attimo; in questo somigliava a Galois e Euler. Quando finalmente affrontò gli esami di maturità fu quasi bocciato in matematica, come aveva temuto, anni prima, il suo maestro elementare; e se passò fu solo perché, ad appena diciassette anni, la sua fama di matematico era già così grande che gli esaminatori non osarono dargli un brutto voto. «Nessun altro studente, a parte Poincaré, avrebbe ottenuto la sufficienza» disse il presidente della commissione promuovendo il ragazzo, che si sarebbe iscritto all'École Polytechnique per poi diventare il più grande matematico francese dell'epoca.

Poincaré scrisse libri di matematica, fisica matematica, astronomia e divulgazione scientifica a decine; scrisse studi di oltre cinquecento pagine su nuovi argomenti matematici da lui creati; diede un grande contributo alla topologia, la disciplina di cui Euler aveva gettato le fondamenta. In effetti, i risultati conseguiti da Poincaré furono così importanti che si fa risalire la vera origine della topologia al 1895, quando fu pubblicata la sua *Analysis situs*. La topologia, che studia le forme, le superfici e le funzioni continue, ha avuto molta importanza nel modo di intendere l'Ultimo Teorema di Fermat nel tardo Novecento; ma ancora più essenziale in questo senso si è rivelato un altro settore nel quale era stato pioniere Henri Poincaré.

Le forme modulari

Poincaré studiò le funzioni periodiche come i seni e coseni di Fourier, tuttavia non sulla linea numerica, come aveva fatto Fourier stesso, bensì nel piano complesso. Il seno dell'angolo x è il rapporto fra il cateto di un triangolo rettangolo opposto all'angolo x e l'ipotenusa (che per convenzione si suppone pari a 1). È una funzione periodica che si ripete ogni volta che l'angolo completa un multiplo del suo periodo di 360 gradi, e tale periodicità costituisce una simmetria. Poincaré studiò il piano complesso, che contiene i numeri reali sull'asse orizzontale e quelli immaginari su

quello verticale, come si vede nella figura sotto.

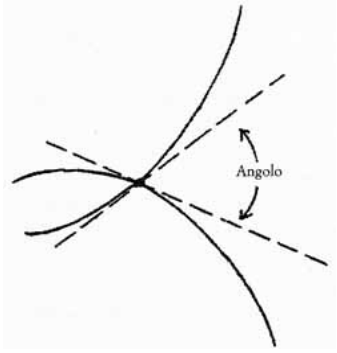


Qui una funzione periodica può essere intesa come una funzione che ha periodicità lungo l'asse reale *ma anche* lungo l'asse immaginario. Poincaré si spinse più in là, e postulò l'esistenza di funzioni con un insieme di simmetrie ancora più grande. Si tratta di funzioni che restano invariate quando la variabile complessa *z* è sottoposta alla trasformazione:

$$f(z) \rightarrow \ f(az + b/cz + d)$$

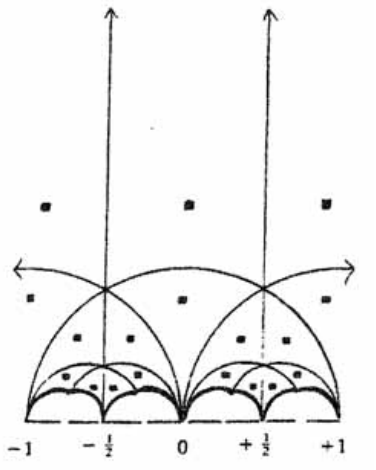
dove gli elementi *a, b, c, d,* disposti in una matrice, formano un *gruppo* algebrico, il che significa che esistono infinite variazioni possibili che commutano tutte fra di loro, e la funzione *f* è *invariante* per questo gruppo di trasformazioni. Poincaré chiamò forme automorfiche tali bizzarre funzioni.

Le forme automorfiche erano creature veramente inusitate, proprio perché soddisfacevano molte simmetrie interne. Poincaré non era del tutto sicuro che esistessero, e raccontò così la ricerca da cui erano nate: ogni mattina, per quindici giorni, appena alzato, trascorse un paio d'ore alla scrivania, cercando di convincersi che le forme automorfiche da lui inventate non potevano assolutamente esistere, ma il quindicesimo giorno si rese conto di essersi sbagliato. Queste strane funzioni, molto difficili da visualizzare, esistevano, e Poincaré le estese ricavandone altre funzioni ancora più complicate: le forme modulari, che abitano la metà superiore del piano complesso e hanno una geometria iperbolica. Abitano cioè uno strano spazio in cui vige la geometria non euclidea di Bolyai e Lobačevskij; per ogni retta e ogni punto di questo semipiano passano molte "rette" parallele a quella data.



In tale spazio queste stranissime forme modulari hanno molte simmetrie, generate aggiungendo un numero alla funzione e formando il reciproco 1/*z*. La figura riprodotta di seguito presenta la tassellatura del semipiano complesso ottenuta

impiegando queste simmetrie.



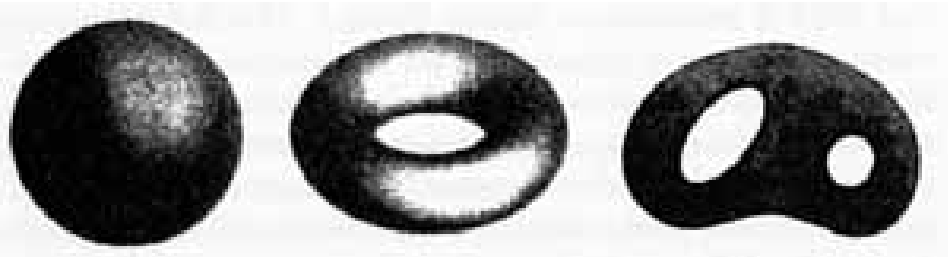
In seguito Poincaré mise da parte le forme automorfiche simmetriche e quelle modulari, ancora più complicate, e passò ad altri rami della matematica. Lavorava in così tanti campi (e spesso in più d'uno contemporaneamente) che non aveva il tempo di soffermarsi a riflettere sulla bellezza di entità pressoché inimmaginabili e infinitamente simmetriche. Ma aveva piantato, senza saperlo, un altro seme nel giardino da cui sarebbe nata, alla fine, la soluzione dell'enigma di Fermat.

Un collegamento inatteso con le ciambelle

Nel 1922 il matematico inglese Louis J. Mordell scoprì un nesso, che gli parve stranissimo, fra le soluzioni delle equazioni algebriche e la topologia. Gli elementi della topologia sono superfici e spazi; le superfici possono appartenere a spazi con un numero qualsiasi di dimensioni: due, come le figure piane della geometria greca antica, tre o anche di più. La topologia è lo studio delle funzioni continue che operano su tali spazi e delle proprietà di questi ultimi. La parte della topologia che interessava a Mordell riguardava le superfici nello spazio tridimensionale. Un esempio molto semplice è quello della superficie sferica: quella di una palla, per esempio un pallone da basket. La palla è tridimensionale ma la sua superficie, posto che non abbia spessore, è un oggetto bidimensionale. Un altro esempio è la superficie terrestre: la terra è tridimensionale, e ogni suo punto è dato da longitudine (prima dimensione), latitudine (seconda dimensione) e profondità (terza dimensione). Ma la sua superficie (priva di spessore) è bidimensionale, dato che ogni suo punto può essere specificato da due numeri, corrispondenti rispettivamente a longitudine e latitudine.

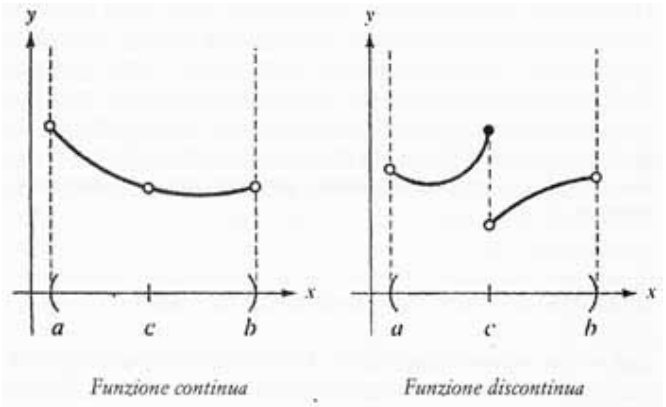
Le superfici bidimensionali nello spazio tridimensionale possono essere classificate secondo il genere, che dipende dal numero dei buchi della superficie. Il genere di una superficie sferica è 0: non ha buchi. Una ciambella invece ne ha uno, perciò il genere della ciambella (il nome matematico è "toro") è 1. Un buco è tale se attraversa la superficie da parte a parte; una tazza con due manici ha due di questi buchi, perciò la sua superficie è di genere 2.

Una superficie di un certo genere può essere trasformata da una funzione continua in un'altra dello stesso genere, mentre la si può trasformare in una superficie di un altro genere solo aprendo o chiudendo dei buchi; cosa che una funzione continua non può fare perché comporta una lacerazione o una saldatura, cioè operazioni che rappresentano discontinuità matematiche.



Genere = 0 Genere = 1 Genere = 2

Mordell scoprì una strana connessione, totalmente imprevista, fra il numero dei buchi della superficie (cioè fra il genere) dello spazio delle soluzioni di un'equazione e il numero, finito o infinito, di tali soluzioni. Se la superficie delle soluzioni ha (usando i numeri complessi per ottenere la massima generalità) due o più buchi (cioè è almeno di genere 2) l'equazione ha solo un numero finito di soluzioni intere. Mordell tuttavia non riuscì a dimostrare la sua scoperta, che prese il nome di Congettura di Mordell.



Funzione continua *Funzione discontinua*

La prova di Faltings

Nel 1983 un matematico tedesco di ventisette anni allora all'università di Wuppertal, Gerd Faltings, riuscì a dimostrare la Congettura di Mordell. A Faltings non interessava l'Ultimo Teorema di Fermat, che considerava una questione isolata di teoria dei numeri; ma la sua dimostrazione, che è molto ingegnosa e usa i potenti strumenti della geometria algebrica, creata in questo secolo, ha avuto conseguenze profonde sullo stato di tale proposizione. Poiché per *n* maggiore di 3 il genere dell'equazione di Fermat è di almeno 2, fu subito chiaro che se esistevano soluzioni intere di tale equazione, erano in numero finito (il che era confortante: ora il loro insieme non era illimitato). Poco dopo altri due matematici, Granville e Heath-

Brown, dimostrarono, usando il risultato di Faltings, che il numero delle soluzioni dell'equazione di Fermat (se pure ne esistevano) diminuiva al crescere dell'esponente *n.* Dunque con l'aumentare di *n* la proporzione degli esponenti per i quali l'Ultimo Teorema di Fermat era vero si approssimava al cento per cento.

In altre parole, l'Ultimo Teorema era vero "quasi sempre". Le soluzioni dell'equazione di Fermat, se esistevano (nel qual caso il teorema non era vero), erano poche e molto intervallate fra di loro. Nel 1983, dunque, lo stato dell'Ultimo Teorema di Fermat era il seguente: era stato dimostrato per *n* minore o uguale a un milione (nel 1992 il limite era salito a 4 milioni), e inoltre, se per qualche *n* più grande esistevano delle soluzioni, esse erano poche e diventavano sempre meno numerose al crescere di *n.*

Il misterioso generale greco dallo strano nome

In Francia sono stati pubblicati a dozzine ottimi testi matematici, scritti in francese, nei quali è indicato come autore Nicolas Bourbaki. È realmente esistito un generale greco con questo nome, vissuto dal 1816 al 1897, che nel 1862 declinò l'offerta di salire al trono di Grecia. L'uomo ebbe un ruolo importante nella guerra franco-prussiana, e c'è un monumento dedicato a lui nella città francese di Nancy. Ma il generale Bourbaki non sapeva niente di matematica e non scrisse mai libri su questo argomento (o su qualsiasi altra cosa). E chi ha scritto, allora, i numerosi volumi di matematica che portano il suo nome?

La risposta è nella meravigliosa Parigi fra le due guerre. Hemingway, Picasso e Matisse non erano i soli cui piacesse sedere al caffè, parlare con gli amici, vedere gente e farsi vedere; a quell'epoca negli stessi caffè della *rive gauche,* vicino all'università, fioriva una vivacissima comunità matematica. Anche ai docenti di matematica piaceva vedere gli amici, prendere un caffè o un *pastis* in qualche buona *brasserie* del Boulevard St. Michel, accanto ai bellissimi giardini del Luxembourg, e parlare di.. matematica. La primavera di Parigi ispirava artisti, scrittori e matematici. Viene spontaneo immaginarli riuniti in un vociante gruppetto, in qualche gradevole caffè, in una bella giornata di sole. Una comune passione li affratella anche quando discutono animatamente qualche sottigliezza teorica. Il chiasso che fanno verosimilmente disturba Hemingway, che scrive; ama lavorare tranquillo, seduto al caffè, e probabilmente se ne va in un altro locale, che gli piace di meno. Ma i matematici non se ne curano. Stanno bene in compagnia, e un caffè pieno di persone come quelle, che parlano tutte la stessa lingua di numeri, simboli, spazi e funzioni, è inebriante. «Così dovevano sentirsi i pitagorici quando parlavano di matematica» dice forse uno dei più anziani del gruppo, alzando il calice per un brindisi. «Sì ma non bevevano Pernod» replica un altro, e tutti ridono. «Ma potremmo fare come loro» risponde il primo. «Perché non formiamo la *nostra* società? Naturalmente segreta.» Intorno tutti approvano, e qualcuno propone di prendere il nome del vecchio generale Bourbaki. C'era un motivo per proporlo: ogni anno il dipartimento di matematica dell'università di Parigi invitava per tradizione un attore professionista che si

presentava a docenti e dottorandi riuniti con il nome di Nicolas Bourbaki e si produceva in un lungo monologo pieno di doppi sensi matematici. Erano spettacoli spassosi perché la matematica moderna, ricca com'è, impiega un lessico molto ampio che serve sì a descrivere concetti matematici, ma ha anche dei significati (diversi) nella vita quotidiana. Prendiamo per esempio una parola come "denso": si dice che i numeri razionali sono densi nei reali, e questo significa che in ogni intorno di un numero razionale ci sono degli irrazionali. Ma "denso" significa anche molte altre cose, riferite alla vita quotidiana.

Anche oggi gli studenti un po' più anziani amano giocare ai doppi sensi matematici e raccontano per esempio l'incontro della bella Polly Nomiale e dell'operatore liscio P. Greco (polinomiale, operatore liscio e pi greco sono naturalmente termini matematici).

I libri che questi matematici scrivevano insieme furono dunque attribuiti a Nicolas Bourbaki, e venne avviato un seminario Bourbaki nelle cui riunioni (abbastanza frequenti) si discutevano idee e teorie matematiche. I membri della società erano anonimi, almeno in teoria, e i risultati ottenuti erano attribuiti alla società, non ai singoli individui.

Ma i membri della società Bourbaki non erano pitagorici. L'autore dei manuali era Nicolas Bourbaki, ma i risultati delle ricerche, cioè teoremi e dimostrazioni ben più prestigiosi dei libri, erano attribuiti ai singoli matematici che li avevano ottenuti. Uno dei primi bourbakisti fu André Weil (1906-), che in seguito passò all'Institute for Advanced Study di Princeton, negli Stati Uniti; il suo nome è indirettamente legato all'importante congettura che portò alla soluzione dell'enigma di Fermat.

Un altro bourbakista fondatore fu il matematico francese Jean Dieudonné, che come la maggioranza degli altri membri (rigorosamente francesi) della società, passò a più verdi pascoli nelle università americane. La figura di Dieudonné, che fu l'autore principale di molti dei libri pubblicati con il nome collettivo di Bourbaki, permette di esemplificare il conflitto fra ricerca dell'anonimato e coscienza individuale che caratterizza i bourbakisti: una volta Dieudonné pubblicò un articolo firmato con il nome di Bourbaki; di lì a poco si scoprì che l'articolo conteneva un errore e lui pubblicò una nota intitolata *Su un errore di N. Bourbaki,* firmata J. Dieudonné.[12]

La natura lievemente schizoide del circolo - una società interamente composta da francesi che però vivevano in maggioranza negli Stati Uniti -, si manifesta nell'affiliazione accademica del signor Bourbaki. Di solito nelle sue pubblicazioni Nicolas Bourbaki viene assegnato all'"università di Nancago", creata unendo il nome della città francese di Nancy con quello di Chicago. Però Bourbaki pubblica solo in francese, e quando i membri della società si riuniscono, di solito in una località della Francia, parlano non solo in francese ma nel gergo degli studenti di Parigi. Lo sciovinismo penetra anche nelle vite individuali di questi francesi che vivono in America. André Weil, fondatore della società, ha pubblicato molti articoli importanti in inglese; ma le sue opere complete (tra le quali vi è anche la trattazione della congettura legata al problema di Fermat) sono state pubblicate in francese con il titolo

[12] Molto di ciò che si sa pubblicamente su questa società segreta è riportato da P.R. Halmos, «Nicolas Bourbaki», in *Scientific American,* maggio 1957, n. 196**,** pagg. 88-97.

di *Œuvres.*[13] In seguito, il comportamento poco ortodosso del loro autore avrebbe danneggiato uno degli attori principali del nostro dramma, e Weil non si sarebbe più ripreso da questo duro colpo.

Si deve riconoscere ai bourbakisti il senso dell'umorismo collettivo. Circa cinquant'anni fa l'American Mathematical Society ricevette una domanda di ammissione individuale dal signor Nicolas Bourbaki. Il segretario della società, imperturbabile, rispose che se il signor Bourbaki voleva iscriversi alla Società avrebbe dovuto fare domanda per divenire membro istituzionale (il che era molto più costoso); il richiedente non rispose.

Le curve ellittiche

Nel Novecento si cominciarono a studiare con crescente interesse i problemi diofantei (quelli cioè sollevati da equazioni del tipo definito da Diofanto nel III secolo d.C.) per mezzo di entità matematiche dette curve ellittiche. Le curve ellittiche, tuttavia, non hanno niente a che fare con le ellissi. Originariamente, quasi due secoli fa, venivano usate in relazione alle funzioni ellittiche, a loro volta escogitate per calcolare il perimetro di un'ellisse. Il pioniere di questo campo, come di molte altre idee matematiche innovative, era stato Gauss.

La cosa singolare è che le curve ellittiche non sono né ellissi né funzioni, ma polinomi cubici in due variabili della forma $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx$, dove a, b e c sono numeri interi o razionali (qui ci interessano le curve ellittiche nel campo razionale). L'illustrazione seguente raffigura alcuni esempi di queste curve ellittiche.[14]

Se consideriamo i punti razionali delle curve ellittiche, cioè solo quei punti di una curva che sono rapporti di due interi (e non gli irrazionali come π, la radice quadrata di 2 eccetera), questi numeri formano un gruppo, il che significa che hanno alcune proprietà molto eleganti. Prendiamo due soluzioni qualsiasi: sarà possibile, in un certo senso, "sommarle" così da produrre una *terza* soluzione lungo la curva.

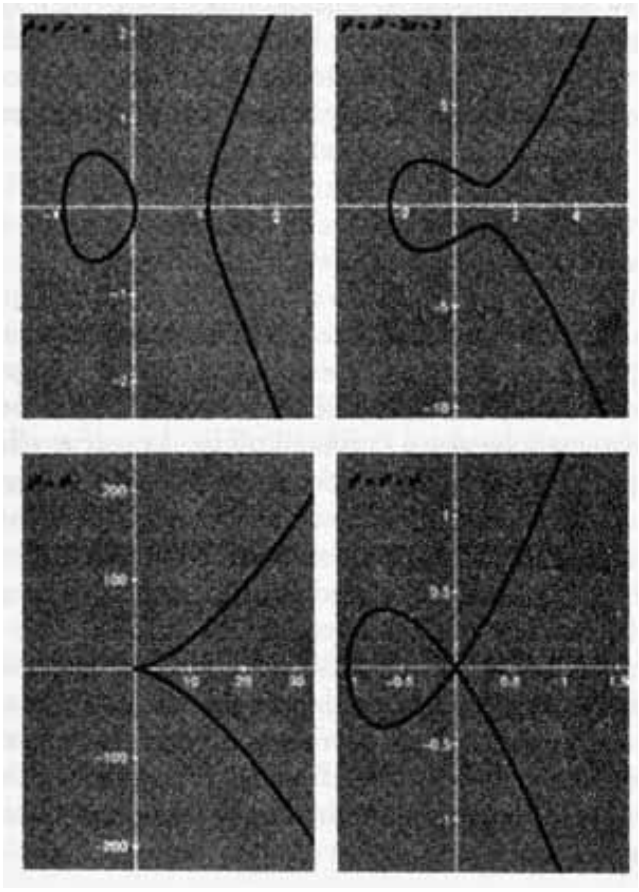
Gli studiosi della teoria dei numeri si sono innamorati delle curve ellittiche da quando hanno scoperto che è possibile usarle per rispondere a molte domande sulle equazioni e le loro soluzioni, tanto che queste curve sono diventate uno dei più importanti strumenti di ricerca in tale campo.[15]

---

[13] A. Weil, *Œuvres,* voll. I-III, Springer-Verlag, Paris 1979.

[14] Adattato da K.A. Ribet e B. Hayes, «Fermat's Last Theorem and Modern Arithmetic», in *American Scientist,* marzo-aprile 1994, vol. LXXXII, pagg. 144-156.

[15] Una buona introduzione a questo argomento si può leggere nel libro di J.H. Silverman e J. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves,* Springer-Verlag, New York 1992.



La nascita di una strana congettura

Gli esperti di teoria dei numeri sapevano già da tempo che *alcune* delle curve ellittiche che studiavano erano modulari. O meglio: tali curve ellittiche (poche) potevano essere considerate connesse alle forme modulari. Era possibile, in qualche modo, collegarle con il piano complesso e con queste funzioni dalle molte simmetrie in uno spazio iperbolico. Non era chiaro come e perché le cose andassero così; la matematica era estremamente complicata anche per gli esperti, e la struttura interna, con le sue belle armonie, era poco conosciuta. Quelle funzioni ellittiche che effettivamente erano modulari avevano proprietà interessanti, e di lì a poco qualcuno avrebbe avanzato una congettura molto ardita: che *tutte* le funzioni ellittiche fossero modulari.

Per capire l'idea di modularità, il cui luogo è lo spazio non euclideo del semipiano complesso superiore, dove le simmetrie sono così complicate che è praticamente impossibile visualizzarle, sarà utile considerare un esempio molto semplice, nel quale la curva che ci interessa non è ellittica, ma invece di essere un'equazione cubica in due variabili è solo un'equazione quadratica in due variabili: un semplice cerchio. L'equazione di un cerchio con raggio a^2 e centro nel punto di coordinate zero è $x^2 + y^2 = a^2$. Consideriamo ora le semplici funzioni periodiche: $x = a \cos t$ e $y = a \sin t$, che possono stare per la x e la y nell'equazione del cerchio. In questo senso, tale equazione è modulare, a causa dell'identità trigonometrica $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, e se sostituiamo questa formula nell'equazione del cerchio

(moltiplicando ogni termine per *a*) otteniamo un'identità.

Una curva ellittica modulare non è che un'estensione di questa idea a un ambiente più complicato, come il piano complesso, con la sua particolare geometria non euclidea. Qui le funzioni periodiche sono simmetrie non solo rispetto a una variabile *t,* come i seni e i coseni sulla linea reale: sono automorfiche, cioè forme modulari nel piano complesso, dotate di simmetrie rispetto a trasformazioni [$f(z) \rightarrow f(az + b/cz + d)$] più complicate.

Tokyo, primi anni cinquanta

All'inizio degli anni cinquanta il Giappone era un paese che si stava risollevando dalle devastazioni belliche. La gente non aveva più fame, ma c'era ancora molta povertà e per il giapponese medio la sopravvivenza quotidiana era una battaglia. Ma dalle macerie rinascevano le fabbriche, le imprese riprendevano a lavorare, l'atmosfera era complessivamente improntata alla speranza.

Anche la vita delle università giapponesi era difficile in quegli anni. La concorrenza fra studenti era feroce, perché buoni voti significavano buoni impieghi dopo la laurea; e questo era ancora più vero per chi puntava al dottorato in matematica pura, dato che i posti all'università scarseggiavano, nonostante le paghe fossero basse. Yutaka Taniyama si stava preparando appunto per conseguire il dottorato in matematica. Era nato il 12 novembre 1927, ultimo di otto figli di un medico condotto di Kisai, circa cinquanta chilometri a nord di Tokyo. Taniyama cominciò molto presto a studiare il settore della matematica che tratta la moltiplicazione complessa delle varietà abeliane. Era un ambito di cui si sapeva poco, e il giovane dovette affrontare considerevoli difficoltà. Quel che è peggio, i consigli dei professori anziani dell'università di Tokyo risultarono praticamente inutili; Taniyama dovette ricavare ogni minimo dettaglio per conto proprio, e per descrivere le varie fasi della sua ricerca matematica usava quattro ideogrammi cinesi che significano "dura lotta" e "aspra contesa". Niente era facile nella vita del giovane Yutaka Taniyama.

Taniyama abitava in un monolocale di otto metri quadrati. Nel suo palazzo c'era un solo gabinetto per piano, in comune fra tutti gli inquilini. Per lavarsi doveva andare ai bagni pubblici, abbastanza lontano da casa. Il suo squallido condominio si chiamava "Villa monti tranquilli": una bella ironia, dato che si trovava in una strada molto trafficata accanto alla ferrovia, con i treni che passavano rumoreggiando ogni pochi minuti. Il giovane Yutaka, forse per concentrarsi meglio sulla sua ricerca, lavorava soprattutto di notte, andando a letto spesso alle sei di mattina, quando cominciavano i rumori del giorno, e a parte il periodo del gran caldo estivo indossava quasi sempre lo stesso vestito verde-azzurro dai riflessi metallici. Come confidò all'amico Goro Shimura, il padre aveva comprato la stoffa a bassissimo prezzo da un venditore ambulante, ma nessuno in famiglia voleva indossarla, a causa di quegli sgradevoli riflessi. Alla fine Yutaka, che *non si* curava del proprio aspetto, si offrì volontario e con la stoffa si fece confezionare un vestito che divenne il suo corredo

quotidiano.

Taniyama si laureò all'università di Tokyo nel 1953 ed ebbe un posto di "studente ricercatore speciale" nel locale dipartimento di matematica. Il suo amico Shimura si era laureato un anno prima e aveva ottenuto un posto analogo, sempre in matematica, al Collegio di pedagogia generale, dal lato opposto del complesso universitario. La loro amicizia cominciò allorché uno *dei due* scrisse all'altro per pregarlo di riportare in biblioteca un numero di una rivista di matematica che gli interessava. Mangiavano spesso insieme in ristoranti poco costosi dove si servivano piatti di gusto occidentale, per esempio la lingua stufata, che proprio allora stava diventando popolare in Giappone.[16]

In quegli anni pochi matematici giapponesi di valore rimanevano in patria. Una volta raggiunta una certa fama, tutti cercavano di passare in un'università americana o europea, dove la comunità matematica era più consolidata ed era possibile stabilire contatti con gente che svolgeva ricerca nello stesso campo; era importante avere questi contatti per andare avanti in ricerche su argomenti esoterici, dei quali si sapeva ancora poco. Fu proprio per cercare di favorire la collaborazione con persone che conoscessero le cose di cui si interessavano che i due amici organizzarono *il* simposio di Tokyo-Nikko sulla teoria algebrica dei numeri, nel settembre del 1955. Alcune affermazioni fatte in occasione di questo piccolo convegno, pur essendo destinate a rimanere a lungo oscure, avrebbero finito per produrre risultati straordinari (e un'aspra polemica) quasi quarant'anni dopo.

16

COURTESY GORO SHIMURA

COURTESY PRINCETON UNIVERSITY

A sinistra: *Yutaka Taniyama.*

A destra: *Goro Shimura intorno al 1965, quando formulò per la prima volta la sua Congettura.*

In basso: *In tram a Nikko durante il convegno del 1955. Da sinistra: T. Tamagawa, J.-P. Serre, Y. Taniyama, A. Weil.*

COURTESY GORO SHIMURA

Un inizio promettente

I due amici riempirono i moduli richiesti dall'amministrazione, trovarono i locali e spedirono gli inviti a diversi matematici locali e stranieri, sperando che si facessero vedere. André Weil, che nel frattempo aveva lasciato la Francia ed era diventato professore all'università di Chicago, fu uno degli invitati che decisero di venire. Al congresso internazionale dei matematici, cinque anni prima, aveva richiamato l'attenzione dei colleghi su di una sconosciuta congettura di un matematico di nome Hasse sulla "funzione *z* di una varietà su di un campo numerico". Era un'enunciazione oscura, ma di un certo interesse per chi faceva ricerca in teoria dei numeri. A quanto pare Weil stava curando una raccolta di congetture nell'ambito della teoria dei numeri, e incluse questa in una silloge dei suoi lavori, attribuendola a Hasse.

Il suo interesse per i risultati in questo campo richiamò su di lui l'attenzione di Taniyama e Shimura, che furono molto contenti quando Weil accettò l'invito al loro convegno. A Tokyo-Nikko venne pure un altro matematico straniero, francese pure lui ma più giovane, Jean-Pierre Serre. Forse in quel momento non era ancora un bourbakista, visto che la società ammetteva solo matematici affermati, ma lo sarebbe diventato nel giro di qualche decennio. Serre, che alcuni colleghi descrivono come un uomo ambizioso e fortemente competitivo, era venuto a Tokyo-Nikko per imparare il più possibile. I giapponesi avevano una certa preparazione in teoria dei numeri, e possedevano molti risultati pubblicati solo nella loro lingua e quindi inaccessibili al resto del mondo: questa era una grande occasione per saperne qualcosa, visto che il convegno si sarebbe tenuto in inglese. Così Serre sarebbe stato uno dei pochi non giapponesi a conoscere la matematica presentata al convegno. Gli atti del simposio furono pubblicati solo in giapponese; ma vent'anni dopo Serre rievocò certi episodi accaduti a Tokyo-Nikko e allora il mondo potè conoscere una versione diversa da quella riportata negli atti in giapponese.

Il programma comprendeva trentasei problemi; di questi, i numeri 10, 11, 12 e 13, scritti da Yutaka Taniyama, riprendevano le idee di Hasse e proponevano una congettura sulle funzioni *z*. A quanto sembra, Taniyama collegava le funzioni automorfiche del piano complesso, create da Poincaré, con la funzione *z* di una curva ellittica; ma rimaneva un mistero come una curva ellittica potesse essere collegata a oggetti esistenti nel piano complesso.

Lei sta dicendo che..

La congettura che aveva preso forma nei quattro problemi era ancora nebulosa. Taniyama non aveva dato una formulazione molto chiara, forse perché non era ben sicuro di quale fosse la connessione; ma l'idea di base c'era. Era un'intuizione, una sensazione a livello viscerale che le funzioni automorfiche, con le loro numerose

simmetrie nel piano complesso, fossero in qualche modo collegate con le equazioni diofantee. Certo, non si trattava di una cosa ovvia: Taniyama stava postulando una connessione nascosta fra due rami della matematica molto distanti.

André Weil voleva capire che cosa avesse esattamente in testa il giovane giapponese. Secondo il resoconto scritto del convegno (gli atti pubblicati in giapponese), fra i due ci fu questo scambio di battute:[17]

> WEIL: Lei pensa che tutte le funzioni ellittiche siano uniformizzate da funzioni modulari?
> TANIYAMA: Le funzioni modulari da sole non bastano. Penso che siano necessari altri tipi speciali di funzioni automorfiche. WEIL: È ovvio che qualcuna, probabilmente, potrà essere trattata in questo modo. Ma nel caso generale esse appaiono completamente diverse, misteriose...

Da questo stralcio di conversazione risultano evidenti *due* cose. La prima è che Taniyama associava alle curve ellittiche le "funzioni automorfiche" e non le sole "funzioni modulari". La seconda è che Weil non credeva che *ci* fosse in generale questo collegamento (in seguito avrebbe detto cose più specifiche sul proprio scetticismo). Questi due aspetti fanno apparire stupefacente che fra tutti proprio il *suo* nome sia stato associato a una congettura che lui non aveva formulato né credeva vera. Ma a volte il destino percorre vie strane e improbabili, e del resto altre cose, ben più bizzarre, dovevano ancora accadere.

Tutto ciò sarebbe diventato importante alcuni decenni dopo. Gli storici moderni terrebbero moltissimo a sapere che cosa esattamente volesse dire e pensasse, e che cosa abbia effettivamente detto Yutaka Taniyama; ma purtroppo la tragedia incombeva su di lui, come su tanti altri giovani geni matematici.

Due anni dopo Goro Shimura lasciò Tokyo per andare prima a Parigi e poi all'Institute for Advanced Study e all'università di Princeton. I due amici continuarono a comunicare per posta e nel settembre del 1958 Shimura ricevette l'ultima lettera di Yutaka Taniyama. La mattina del 17 novembre 1958, cinque giorni dopo aver compiuto trentun anni, Taniyama fu trovato morto nel suo appartamento. Sulla scrivania c'era un biglietto che annunciava il suicidio.

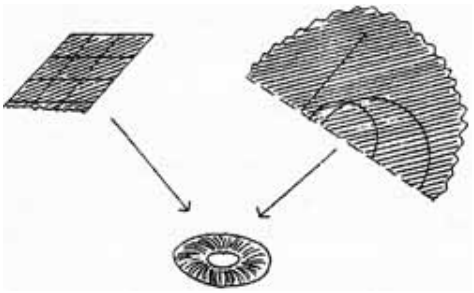
La Congettura di Shimura

Erano passati dieci anni dal convegno di Tokyo-Nikko e Goro Shimura, che ora lavorava a Princeton, proseguiva le sue ricerche sulla teoria dei numeri, le funzioni *z* e le curve ellittiche. Aveva individuato gli errori del suo sventurato amico, e la sua personale ricerca di armonie nascoste nel regno della matematica lo aveva condotto a formulare una congettura diversa, più ardita e precisa: che ogni curva ellittica sui numeri razionali fosse uniformizzata da una forma modulare. Le forme modulari sono elementi del piano complesso più specifici delle funzioni automorfiche di Taniyama.

[17] Pubblicato sulla rivista giapponese *Sugaku,* maggio 1956, pagg. 227-231.

C’erano state anche altre correzioni importanti, fra cui la scelta del dominio specifico dei numeri razionali.

Possiamo spiegare la Congettura di Shimura per mezzo di una figura:



Se “pieghiamo” il piano complesso ricavandone un toro (la ciambella della figura), questa superficie conterrà tutte le soluzioni delle equazioni ellittiche nei numeri razionali, derivanti a loro volta dalle equazioni diofantee. Il fatto che in seguito sarebbe diventato importante per la dimostrazione dell’Ultimo Teorema di Fermat è che se esiste una soluzione dell’equazione $x^n + y^n = z^n$, deve giacere anch’essa sul toro. Ora, Shimura ipotizzò che ogni curva ellittica con coefficienti razionali (cioè ogni equazione con coefficienti della forma a/b, dove a e b sono numeri interi) avesse una “compagna” nel semipiano complesso di Poincaré, con la sua geometria non euclidea iperbolica. La compagna di ogni singola curva ellittica razionale era una funzione molto specifica sul semipiano complesso, invariante per complicate trasformazioni del piano - quelle ricordate sopra: $f(z) \rightarrow f(az + b/cz + d)$, con i coefficienti che formano un gruppo dalle molte e impreviste simmetrie -; il tutto era molto complesso, molto tecnico e, secondo la maggior parte dei matematici dei decenni a venire, indimostrabile almeno nell’immediato futuro.

La Congettura di Shimura diceva, in sostanza, che ogni curva ellittica era la parte emergente dell’iceberg; per dimostrarla bisognava far vedere che *ogni* iceberg aveva una parte sommersa. Di alcuni gruppi speciali di iceberg questo si sapeva già, ma gli iceberg erano infiniti e non si poteva andare a guardare sotto a ciascuno. Ci voleva una dimostrazione generale per poter affermare che non può esistere un iceberg che non abbia una parte sommersa; ma si riteneva che questa dimostrazione fosse straordinariamente difficile da mettere insieme.

Intrigo e tradimento

Durante un ricevimento all’Institute for Advanced Study di Princeton, nei primi anni sessanta, Shimura rivide Jean-Pierre Serre che, stando al suo racconto, lo avvicinò con una certa arroganza. «Non credo che i suoi risultati sulle curve modulari valgano granché» gli disse. «Non si possono nemmeno applicare a una curva ellittica arbitraria.» Shimura rispose con la formulazione esatta della sua Congettura: «Una curva ellittica arbitraria deve *sempre* essere uniformizzata da una curva modulare».[18]

[18] Così Shimura enunciò a Serre la sua Congettura effettiva, comunicandola per la prima volta e confidando,

Serre allora andò da Weil, che non era venuto al ricevimento ma faceva parte dell'Institute for Advanced Study e lavorava in un ufficio nelle vicinanze, e gli parlò della sua conversazione con Shimura. Weil allora volle incontrare quest'ultimo e gli chiese, perplesso: «Lei sostiene veramente questa cosa?». «Sì» rispose Shimura «non le sembra plausibile?» Dieci anni dopo l'analoga Congettura di Taniyama, Weil continuava a non credere né a quella né a questa e rispose: «Non vedo argomenti contro questa ipotesi, visto che entrambi gli insiemi sono numerabili, ma non vedo neanche argomenti a favore». In seguito queste parole di Weil sarebbero state definite "stupide" e "vacue" da Serge Lang della Yale University, che avrebbe fatto circolare questi aggettivi fra circa cinquanta matematici di tutto il mondo, insieme ad alcune copie di una ventina di lettere cui aveva dato il nome collettivo di F*ascicolo Taniyama-Shimura.* Ciò che intendeva Weil rispondendo a Shimura era sostanzialmente questo: se in una stanza ci sono sette uomini e sette donne e tu congetturi che siano sette coppie sposate, non vedo alcuna ragione contro la tua congettura, dato che il numero degli uomini è uguale a quello delle donne, ma nemmeno vedo ragioni a favore. Potrebbero anche essere tutti scapoli e nubili. Ciò che spinse Lang a definire stupida e vacua una simile affermazione era che qui in realtà l'argomento del conteggio non aveva un'applicazione diretta e immediata, perché "numerabile" significa infinito e suscettibile di essere contato (come il numero di tutti gli interi positivi: 1, 2, 3, 4..) e mettere in corrispondenza queste collezioni infinite non è una cosa semplice. Era chiaro, in ogni caso, che André Weil non riteneva necessariamente vera la Teoria di Shimura. In seguito avrebbe ammesso che la conversazione c'era stata e, stupida e vacua o no, l'avrebbe citata. Ma questo accadde solo nel 1979, quando scrisse:[19]

> *Quelques annees plus tara, a Princeton, Shimura me demanda si je trouvais plausible que toute courbe elliptique sur Q fût con tenue dans la jacobienne d'une courbe definie par un sous-groupe de congruence du groupe modulaire; je lui repondis, il me semble, que je n'y voyais pas d'empéchement, puisque l'un et l'autre ensemble est dénombrable, mais je ne voyais rien non plus qui parlat en faveur de cette hypothèse.*[20]

Ma anche nel 1979 Weil scrisse "Shimura mi chiese" (*me demanda)* e non "Shimura mi disse", riferendosi all'enunciato della Congettura del matematico giapponese; senonché pubblicò pure alcuni articoli sull'argomento, e sebbene non credesse nella Teoria di Shimura, il suo nome finì per esserle associato. L'errore fu poi perpetuato dai riferimenti a opere altrui fatti da vari matematici nei loro lavori; e persiste ancora oggi, tanto che gli autori che ignorano la vicenda parlano di Congettura di Weil-Taniyama, e non di Shimura-Taniyama. Non sembra che a Weil dispiacesse questa associazione del suo nome con una teoria importante, che

---

implicitamente, che Serre riconoscesse in lui l'autore.

[19] A. Weil, *Œuvres,* cit., vol. III, pag. 450.

[20] Qualche anno dopo, a Princeton, Shimura mi chiese se trovavo plausibile che ogni curva ellittica su Q fosse contenuta nella jacobiana di una curva definita da un sottogruppo di congruenza del gruppo modulare; mi sembra di avergli risposto che non vedevo nessun impedimento, dato che entrambi gli insiemi sono numerabili, ma nemmeno vedevo alcun argomento a favore di questa ipotesi [N.d.T.].

(nonostante lui personalmente non vi prestasse fede) secondo la maggior parte dei matematici sarebbe stata dimostrata, sia pur in un lontano futuro.

Con il passare dei decenni, sempre nuove ragioni parlavano a favore della connessione. Se mai la Congettura fosse stata provata, sarebbe stata una teoria matematica importante; Weil ci lavorò sopra e i risultati che ottenne non furono mai troppo lontani da quel possibile collegamento tra le forme modulari del piano complesso e le curve ellittiche delle equazioni diofantee. Ma sebbene sicuramente sapesse più di quello che diceva, per quasi vent'anni non fece mai cenno a Shimura e al suo ruolo cruciale; dopo di che ne parlò bene quasi per caso in una conversazione e fece il suo nome, di sfuggita, anche in un lavoro a stampa. Intanto in Francia Serre contribuiva attivamente alla falsa attribuzione, facendo di tutto per associare alla Congettura il nome di André Weil invece di quello di Goro Shimura.

Un esercizio per il lettore interessato

Nel 1967 André Weil scrisse un articolo in tedesco nel quale diceva:[21]

> *Ob sich diese Dinge immer, d. h. für jede über Q definierte Kurve C, so verhalten, scheint im Moment noch problematisch zu sein und mag dem interessierten Leser als Übungsaufgabe empfohlen werden.*[22]

Questo capoverso si riferisce alla curve ellittiche nel campo dei razionali (che i matematici indicano con Q), mentre lo "stare così" riguarda la modularità; siamo di fronte cioè alla Congettura di Shimura. Ma nemmeno qui Weil attribuiva la teoria al suo autore; lo avrebbe fatto solo dodici anni dopo e, come abbiamo appena visto, anche allora premettendo: "Shimura mi chiese". Nell'articolo in tedesco citato sopra Weil chiama "problematica" la Congettura di Shimura e poi fa una cosa strana: l'assegna come esercizio "al lettore interessato". A uno dei migliori matematici del mondo ci sarebbero voluti sette anni di lavoro solitario per cercare di dimostrare questo esercizio; ma quando un matematico assegna un compito a casa, di solito conosce perfettamente la soluzione e crede, anzi ritiene con certezza, che il teorema sia vero e non "problematico", come dice Weil.

C'è una vecchia storiella su un professore di matematica che parlando di un certo concetto dice in classe: «Questo è evidente». I ragazzi sono confusi perché la cosa non è affatto evidente, e finalmente uno più coraggioso alza la mano e chiede: «Perché?». Allora il professore comincia a scribacchiare sul bordo della lavagna coprendo con la mano libera le cose che scrive, e cancellandole man mano che non gli servono più. Dopo dieci minuti di questa scrittura nascosta cancella tutto quello che c'è sulla lavagna e annuncia ai suoi confusissimi allievi: «Sì, è evidente».

---

[21] A. Weil, «Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen», in *Mathematische Annalen,* 1967, vol. CLXVIII, pagg. 165-172.

[22] Se le cose stiano così in ogni caso, cioè per ogni curva C definita su Q, è una questione ancora problematica al momento, che può essere raccomandata come esercizio al lettore interessato [N.d.T.].

La menzogna

Negli anni settanta i problemi posti da Taniyama al convegno di Tokyo-Nikko ebbero una circolazione più ampia; intanto, visto che Weil aveva scritto dei lavori sulla Congettura (di cui dubitava), le curve ellittiche modulari avevano preso il nome di Curve di Weil, e quando i problemi di Taniyama cominciarono a essere conosciuti un po' meglio in Occidente, la congettura relativa a queste curve fu chiamata Congettura di Weil-Taniyama. Il nome di Shimura era rimasto escluso. Ma dopo che fu affiorato quello di Taniyama, Weil cominciò a inveire contro le congetture in genere, prendendosela anche con "la cosiddetta 'Congettura di Mordell' sulle equazioni diofantee" (che Gerd Faltings avrebbe provato appena cinque anni dopo) e aggiungendo, per rincarare la dose, che "sarebbe bello se le cose stessero così, e io preferirei scommettere a favore che contro. Ma questo significherebbe scambiare i desideri per realtà, dato che non abbiamo uno straccio di prova a favore o contro". Ancora una volta però Weil si sbagliava. Diversi matematici russi, fra i quali Shafarevich e Parshin, stavano già ottenendo fin dai primi anni settanta risultati che erano altrettanti elementi a favore della Congettura di Mordell. E nel 1984, naturalmente, Gerd Faltings l'avrebbe dimostrata, rendendo "quasi sempre vero" l'Ultimo Teorema di Fermat.

Mentre Weil, il cui nome ormai non era più associato in modo esclusivo alla Congettura che molti matematici avevano preso a chiamare di Weil-Taniyama, stava diventando ostile a tutte le congetture, a Parigi Serre si dava da fare per tenere il nome di Shimura fuori dai giochi. Nel 1986, durante un ricevimento alla University of California a Berkeley, Jean-Pierre Serre (pur essendo consapevole che diverse persone erano abbastanza vicine da sentirlo) disse a Serge Lang che André Weil gli aveva raccontato di una sua conversazione con Goro Shimura durante la quale avrebbe avuto luogo il seguente scambio di battute:

> WEIL: Perché Taniyama pensava che tutte le curve ellittiche fossero modulari?
> SHIMURA: Gliel'aveva detto proprio lei, ma se n'è dimenticato.

A quel punto Serge Lang che, ignaro di tutto, aveva sempre usato i termini "Curva di Weil" e "Congettura di Weil-Taniyama", si insospettì, decise che doveva scoprire la verità e scrisse subito a Weil e a Shimura (e dopo un po' anche a Serre). Shimura negò categoricamente che quella conversazione avesse mai avuto luogo e fornì ottimi elementi a sostegno della sua tesi; Weil non rispose subito; Serre rispose criticando Lang per avere cercato di scoprire la verità (nel seminario Bourbaki del giugno 1995 parlò ancora di "Congettura di Weil-Taniyama" tacendo il nome del vero autore, che gliel'aveva confidata trent'anni prima). Weil rispose dopo un secondo tentativo di Lang di mettersi in contatto con lui. Ecco la sua lettera.[23]

[23] La lettera di Weil a Lang e gran parte della cronologia dei fatti qui descritti, comprese le conversazioni private e le lettere, sono riportate in S. Lang, «Some History of the Shimura-Taniyama Conjecture», in *Notices of the American Mathematical Society,* novembre 1995, pagg. 1301-1307. Va a onore di Lang il fatto che il suo articolo e il "fascicolo

3 *dicembre 1986*

Caro Lang,

non ricordo dove e quando ho ricevuto la sua lettera del 9 agosto. Quando mi è arrivata avevo (e ho ancora) cose molto più serie a cui pensare. L'idea che io abbia mai cercato di sminuire il credito dovuto a Taniyama e Shimura non può che irritarmi fortemente. Sono lieto di sapere che lei li ammira; li ammiro anch'io. Quando si raccontano conversazioni svoltesi molto tempo addietro, i malintesi sono frequenti. Lei ha deciso di considerare "storia" queste conversazioni, ma non lo sono; nel migliore dei casi sono aneddoti. Per quanto riguarda la controversia che lei ha creduto di dover sollevare, trovo che le lettere di Shimura la chiudano una volta per tutte. Per quanto riguarda il dare un nome a concetti, teoremi o (?) congetture, ho detto spesso che: (a) quando si associa un nome proprio, poniamo, a un concetto, non si deve mai pensare che ciò indichi che l'autore in questione abbia a che fare con il concetto, perché è vero più spesso il contrario. Pitagora non ha a che fare con il suo teorema, o Fuchs con le funzioni fuchsiane, più di quanto Auguste Comte abbia a che fare con rue Auguste Comte. (b) Esiste una tendenza, del tutto corretta, a sostituire i nomi propri con termini più adeguati. Oggi la successione di Leray-Koszul è una successione spettrale (e, come disse una volta Siegel a Erdös, ormai abeliano si scrive con la a minuscola).

Perché non avrei dovuto fare, qualche volta, osservazioni "stupide", come lei ha la cortesia di dire? Ma ero effettivamente "fuori del giro" nel 1979, quando espressi il mio scetticismo sulla Congettura di Mordell, perché all'epoca ignoravo totalmente i lavori dei russi (Parshin eccetera) in tale direzione. La mia sola scusante, ammesso che sia tale, è che nel 1972 avevo avuto delle lunghe conversazioni con Shafarevich il quale non mi parlò mai di questi lavori. Sinceramente, suo

André Weil

P.S. Se desidera infilare questa lettera nella sua Xerox, lo faccia pure liberamente. Mi domando come farebbe la Xerox Co. senza di lei e quelli come lei.

Nella Foresta Nera, autunno 1984

Mentre a Berkeley, New Haven, Princeton, e dall'altra parte dell'Atlantico a Parigi, infuriava la controversia sui veri autori della Congettura di Shimura-Taniyama, nel cuore della Foresta Nera, nel sud-ovest della Germania, accadeva qualcosa di completamente imprevisto.

Gerhard Frey aveva conseguito la laurea all'università di Tübingen e il dottorato in quella di Heidelberg, dove aveva studiato teoria dei numeri e subito l'influenza dei lavori di Hasse e Weil. Frey era affascinato dall'interazione fra la teoria dei numeri e la geometria algebrica, un settore della matematica creato negli ultimi cinquant'anni, ma gli interessava anche la geometria aritmetica. Proprio le connessioni fra la teoria dei numeri e i due nuovi campi della geometria algebrica e aritmetica l'avrebbero

---

Shimura-Taniyama" che per dieci anni ha diffuso tra i matematici stiano contribuendo, finalmente, a dare a Goro Shimura quel riconoscimento che giustamente merita.

portato a enunciare una tesi matematica nuova e imprevista. Negli anni settanta Frey lavorò moltissimo sulle curve ellittiche e le equazioni diofantee, e nel 1978 lesse *Curve modulari e ideale di Eisenstein,* un articolo di Barry Mazur della Harvard University che esercitò una forte influenza su di lui, come pure su molti altri studiosi di teoria dei numeri, fra i quali Kenneth Ribet dell'università di Berkeley e Andrew Wiles di quella di Princeton. L'articolo di Mazur convinse Frey a occuparsi seriamente di applicazioni delle curve modulari e delle rappresentazioni di Galois alla teoria delle curve ellittiche, e scoprì che queste ricerche lo portavano quasi inevitabilmente a problemi diofantei strettamente legati a equazioni di tipo Fermat. Era un'intuizione molto potente, e Frey cercò di renderla più precisa.

Nel 1981 Frey passò qualche settimana a Harvard e discusse più di una volta con Barry Mazur. Furono discussioni chiarificatrici: cominciò così a dissiparsi la fitta nebbia che avvolgeva la difficile connessione fra le equazioni di tipo Fermat e la relazione tra forme modulari e curve ellittiche di cui Frey si occupava da tempo. Frey andò poi a Berkeley, dove parlò con Ken Ribet, un brillante teorico dei numeri che si era laureato a Harvard e aveva lavorato con Mazur su questioni dello stesso tipo, quindi tornò nella sua Germania. Tre anni dopo fu invitato a tenere una conferenza al centro di Oberwolfach, nel cuore della Foresta Nera.

Oberwolfach è stato ideato come centro di convegni e incontri di lavoro per i matematici; si trova in una zona bellissima e tranquilla, lontana dalle grandi città e dalla folla. Ogni anno organizza una cinquantina di incontri matematici internazionali su vari argomenti; la partecipazione alle conferenze, compresa la semplice presenza, è esclusivamente su invito. Si fa tutto il possibile per facilitare gli scambi di idee fra esperti di paesi diversi.

Nel 1984 Gerhard Frey parlò a un convegno sulla teoria dei numeri, sostenendo una tesi che sembrava pazzesca; i fogli a ciclostile zeppi di formule da lui distribuiti avevano l'aria di implicare che se la Congettura di Shimura-Taniyama era vera, si sarebbe potuto dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. Era una cosa assurda; la prima volta che Ken Ribet la sentì dire a Frey, pensò che fosse uno scherzo. Che cosa poteva mai avere a che fare la modularità delle curve ellittiche con l'Ultimo Teorema di Fermat? Ribet non pensò più a questa strana asserzione e riprese il suo lavoro normale; ma a Parigi, e anche in altri luoghi, diverse persone erano interessate alla tesi indimostrata (e in una certa misura incompleta) di Frey. Jean-Pierre Serre scrisse una lettera privata su questo argomento a un altro matematico, un certo J-F. Mestre; ma la lettera fu divulgata, e in seguito Serre pubblicò un articolo in cui riprendeva le congetture esposte nella lettera a Mestre.[24]

[24] J.-P. Serre, *Lettre à J.-F. Mestre,* ristampato in *Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry,* American Mathematical Society, Providence 1987, pagg. 263-268.

Il teorema di Ribet

Ken Ribet, il quale inizialmente aveva pensato che Frey volesse scherzare, cominciò a riflettere sulle congetture di Serre e vi riconobbe qualcosa cui era già arrivato per conto proprio, quando aveva trovato il tempo di pensare allo "scherzo" del matematico tedesco. Si trattava di certe precisazioni della tesi di Frey che, se fossero state dimostrate, avrebbero permesso di formulare l'implicazione:

Congettura di Shimura-Taniyama $\rightarrow$ Ultimo Teorema di Fermat

L'idea di Frey funzionava in modo ingegnoso. Il ragionamento era il seguente: supponiamo che l'Ultimo Teorema di Fermat *non* sia vero. Allora per qualche potenza *n* maggiore di 2 *c'è* una soluzione dell'equazione di Fermat $x^n + y^n = z^n$, dove *x, y e z* sono numeri interi. Ora, una soluzione specifica, diciamo *a, b e c,* darebbe origine a una curva ellittica specifica; e Frey scrisse appunto l'equazione generale della curva risultante da tale soluzione dell'equazione di Fermat. La Congettura da lui presentata a Oberwolfach diceva che questa curva, oggi detta di Frey, era una "bestia" stranissima, anzi talmente strana che assolutamente non poteva esistere; ma soprattutto, la curva ellittica che avrebbe dovuto esistere se l'Ultimo Teorema di Fermat fosse stato falso *non* era modulare. Ma se la Congettura di Shimura-Taniyama era vera, tutte le curve ellittiche dovevano essere modulari, e non poteva esserci una curva ellittica non modulare; ne seguiva che la Curva di Frey, che era appunto ellittica non modulare (oltre ad avere molte altre caratteristiche strane), non poteva esistere e quindi non poteva esistere nemmeno una soluzione dell'equazione di Fermat per $n>2$. Ma se simili soluzioni non esistevano, l'Ultimo Teorema di Fermat, che dice appunto che *non* ci sono soluzioni dell'equazione per $n>2$, era dimostrato.

Era una successione di implicazioni molto complessa che però seguiva splendidamente la logica della dimostrazione matematica. La logica diceva: A implica B, perciò se B non è vera nemmeno A può esserlo.

Tuttavia l'enunciato di Frey era solo una *congettura:* la congettura secondo la quale se un'altra Congettura (quella di Shimura-Taniyama) era vera, l'Ultimo Teorema di Fermat risultava dimostrato. Le successive congetture di Serre nella lettera a Mestre permettevano a Ribet di pensare quella di Frey in termini chiari.

Prima di allora Ken Ribet non si era mai interessato all'Ultimo Teorema di Fermat. Veniva dagli studi di chimica alla Brown University, ma sotto l'influenza e la guida di Kenneth F. Ireland era passato alla matematica e si era occupato di funzioni *z,* somme esponenziali e teoria dei numeri, mettendo da parte l'Ultimo Teorema di Fermat come "uno di quei problemi sui quali non si poteva dire più niente di veramente importante".

Molti matematici la pensavano così; il fatto è che i problemi di teoria dei numeri sono tendenzialmente isolati, privi di uno schema unificatore o di un principio generale che li sostenga. Ma la cosa interessante dell'Ultimo Teorema di Fermat è che esso abbraccia tutta la storia della matematica, dall'alba della civiltà ai nostri

giorni; e la sua soluzione finale abbraccia pure la matematica in tutta la sua ampiezza ed è legata a campi molto diversi dalla teoria dei numeri: algebra, analisi, geometria, topologia..

Ribet passò alla Harvard University per conseguire il dottorato in matematica. A Harvard, prima indirettamente e poi in modo più diretto verso la fine dei suoi studi, subì l'influenza di Barry Mazur, grande studioso di geometria e teoria dei numeri, le cui idee hanno ispirato tutti i matematici contemporanei che hanno avuto a che fare, anche marginalmente, con i tentativi di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. Il suo saggio sull'ideale di Eisenstein come astrazione della teoria degli ideali creata da Kummer nel secolo scorso ha influenzato gli ambiti matematici di maggiore attualità: la geometria algebrica e i nuovi approcci alla teoria dei numeri attraverso la geometria.[25]

Alla fine Ken Ribet divenne professore di matematica alla University of California di Berkeley. Svolgeva ricerche di teoria dei numeri, e nel 1985 sentì parlare della "folle" idea di Frey secondo cui, se esisteva una soluzione dell'equazione di Fermat, cioè se l'Ultimo Teorema di Fermat era falso, questa soluzione avrebbe dato origine a una curva veramente bizzarra; e tale "Curva di Frey" sarebbe stata associata a una curva ellittica non modulare. Le due congetture associate a questo problema avanzate da Serre nella lettera a Mestre lo stimolarono a cercare di dimostrare l'ipotesi di Frey. A Ribet l'Ultimo Teorema di Fermat non interessava molto; ma si rese conto che era diventato un problema scottante, situato, per di più, in un campo che conosceva bene. Durante la settimana dal 18 al 24 agosto 1985, mentre si trovava a un convegno di geometria algebrica aritmetica ad Arcata, in California, Ribet cominciò a riflettere sull'enunciato di Frey, e continuò a pensarci per tutto l'anno successivo. All'inizio dell'estate del 1986, libero dall'obbligo dell'insegnamento, volò in Germania dove lo attendeva un periodo di ricerca in un centro matematico di fama mondiale, il Max Planck Institut. Fece un grande passo avanti proprio mentre ci arrivava; ora era quasi in grado di provare la Congettura di Frey.

Ma gli mancava ancora qualcosa. Quando tornò a Berkeley incontrò Barry Mazur, in visita da Harvard. «Barry, andiamo a prenderci un caffè» gli propose; i due si sedettero in un caffè molto frequentato vicino all'università, e Ribet, mentre sorseggiava un cappuccino, confidò a Mazur: «Sto cercando di generalizzare quello che ho fatto, in modo da poter dimostrare la Congettura di Frey. Ma mi manca una cosa per generalizzare, questa..». Mazur guardò il manoscritto che Ribet gli stava mostrando e disse: «Ma ci sei già, Ken, hai solo bisogno di sommare qualche altro gamma zero di struttura N, di ripercorrere il tuo argomento, e ci sei». Ribet guardò Mazur, poi il suo cappuccino e poi di nuovo Mazur, incredulo. «Dio mio, hai assolutamente ragione!» replicò, dopo di che tornò in ufficio per gli ultimi ritocchi alla prova. «L'idea di Ken era brillante!» esclamò Mazur descrivendo l'ingegnosa dimostrazione di Ribet, dopo che fu pubblicata e resa nota ai matematici di tutto il mondo.

Ribet formulò e dimostrò un teorema che affermava che, se la Congettura di Shimura-Taniyama era vera, l'Ultimo Teorema di Fermat ne sarebbe derivato per,

[25] B. Mazur, *Modular Curves and the Eisenstein Ideal,* The Mathematical Publications of I.H.E.S., Paris 1977, vol. XLVII, pagg. 33-186.

conseguenza diretta. L'uomo che solo un anno prima riteneva l'ipotesi di Frey uno scherzo, ora dimostrava che lo "scherzo" era una realtà matematica. La via di un attacco al problema di Fermat che utilizzasse i metodi moderni della geometria algebrica aritmetica era aperta; il mondo aveva solo bisogno di qualcuno che dimostrasse la Congettura di Shimura-Taniyama, apparentemente intrattabile, dopo di che l'Ultimo Teorema di Fermat sarebbe stato automaticamente vero.

COURTESY C.J. MOZZOCHI

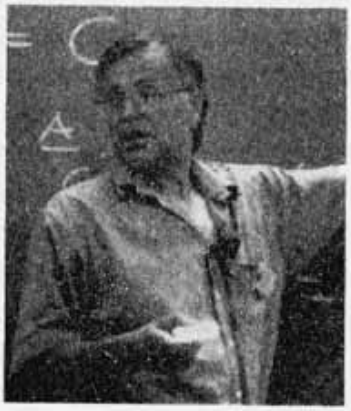
Ken Ribet mentre presenta i suoi importanti teoremi.

COURTESY C.J. MOZZOCHI

Andrew Wiles durante un'intervista.

COURTESY C.J. MOZZOCHI

Barry Mazur della Harvard University, soprannominato affettuosamente "il nonno": un matematico le cui intuizioni geometriche ispirarono tutti coloro che contribuirono alla dimostrazione conclusiva dell'Ultimo Teorema di Fermat.



COURTESY C.J. MOZZOCHI

Gerhard Frey ebbe la "folle idea" che una curva ellittica risultante da una soluzione dell'equazione di Fermat non potesse affatto esistere.

Il sogno di un bambino

La persona che voleva fare proprio questo, e nient'altro che questo, era Andrew Wiles. Quando aveva dieci anni, Wiles andò alla biblioteca pubblica della sua città, in Inghilterra, e prese un libro di matematica. Fu in quel libro che lesse dell'Ultimo Teorema di Fermat; per come ne parlava il testo sembrava così semplice che qualsiasi bambino lo avrebbe potuto capire. Ma ecco le parole di Wiles: "Diceva che non si troveranno mai numeri *x,y* e *z* tali che $x^3 + y^{3,} = z^3$ Per quanto uno ci provi, non li troverà mai e poi mai. E diceva che lo stesso era vero per $x^4 + y^4 = z^4$, $x^5 + y^5 = z^5$ e così via.. Sembrava così semplice. E diceva anche che per più di trecento anni nessuno aveva mai trovato una dimostrazione. Io volevo dimostrarlo..".

Negli anni settanta Andrew Wiles si iscrisse all'università, e dopo la laurea fu ammesso a Cambridge come dottorando di matematica; lo seguiva il professor John Coates. Wiles dovette rinunciare al suo sogno infantile di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat; la ricerca in quel campo gli avrebbe portato via più tempo di quello che un dottorando si potesse permettere. E poi, quale relatore avrebbe accettato uno studente che lavorava su un enigma venerando, la cui soluzione era sfuggita ai migliori cervelli del mondo per tre secoli? Negli anni settanta Fermat non era di moda; il vero argomento "caldo", per le ricerche di teoria dei numeri, erano le curve ellittiche. E così Andrew Wiles impiegava il suo tempo a svolgere ricerca sulle curve ellittiche, nel settore della cosiddetta Teoria di Iwasawa. Completò la sua dissertazione, e quando conseguì il dottorato trovò un posto all'università di Princeton e si trasferì negli Stati Uniti, dove proseguì le ricerche sulle curve ellittiche e la Teoria di Iwasawa.

L'antica fiamma si ravviva

Era una calda serata estiva, Andrew Wiles stava prendendo un tè freddo a casa di un amico e di colpo, nel bel mezzo di una conversazione, l'amico disse: «A proposito, lo sai che Ken Ribet ha appena dimostrato la Congettura *epsilon?».*

"Congettura *epsilon*" era il nome che gli studiosi di teoria dei numeri davano informalmente alla Congettura di Frey, modificata da Serre, sul nesso fra l'Ultimo Teorema di Fermat e la Congettura di Shimura-Taniyama. Wiles provò come una scossa elettrica e seppe in quello stesso momento che la sua vita stava cambiando. Il suo sogno infantile di provare l'Ultimo Teorema di Fermat, un sogno cui aveva dovuto rinunciare per coltivare ricerche più realistiche, tornò alla vita con una forza incredibile. Andò a casa e si mise a pensare a come dimostrare la Congettura di Shimura-Taniyama.

"Sapevo" confidò in seguito "che nei primi anni non avrei avuto concorrenti perché mi rendevo conto che nessuno, me compreso, aveva la minima idea di dove cominciare." Decise di lavorare nel segreto e nell'isolamento più totali. "L'avere

troppi spettatori avrebbe disturbato la mia concentrazione, e scoprii molto presto che bastava fare il nome di Fermat per suscitare subito un interesse esagerato." Naturalmente i matematici dotati e capaci abbondano, soprattutto in un posto come Princeton, e il pericolo che qualcuno completi il tuo lavoro al posto tuo, magari migliorandolo, è reale.

Quale che fosse la ragione, Wiles si chiuse nell'attico dove aveva lo studio e si mise al lavoro, abbandonando ogni altro progetto di ricerca per dedicare tutto il suo tempo a Fermat. Avrebbe usato l'intera potenza del macchinario moderno dell'algebra, della geometria, dell'analisi e degli altri settori della matematica; e avrebbe anche usato gli importanti risultati conseguiti dai contemporanei e dai suoi predecessori storici: gli ingegnosi metodi di prova di Ribet e i suoi risultati, le teorie di Barry Mazur, le idee di Shimura, Frey, Serre, André Weil e moltissimi altri matematici.

La grandezza di Wiles, avrebbe detto in seguito Gerhard Frey, stava nel credere in quello che faceva in un momento in cui praticamente nessun matematico al mondo pensava che la Congettura di Shimura-Taniyama potesse essere dimostrata entro il XX secolo.

Andrew Wiles sapeva che per provare la Congettura avrebbe dovuto dimostrare come ogni curva ellittica sia modulare; doveva, cioè, far vedere che ogni curva ellittica (le cui soluzioni giacciono su una ciambella) in realtà è una forma modulare mascherata. In un certo senso la ciambella era anche questo spazio di funzioni dalle intricate simmetrie nel piano complesso, dette forme modulari. Ma nessuno aveva la minima idea di come si potesse individuare una connessione talmente bizzarra fra questi due tipi di entità, in apparenza molto diversi.

Wiles si rese conto che la via migliore era quella di cercare di *contare* il numero delle curve ellittiche e il numero delle curve ellittiche *modulari* per poi dimostrare che i due "numeri" erano uguali. Questa costruzione avrebbe provato che curve ellittiche e curve ellittiche modulari erano la stessa cosa e quindi ogni curva ellittica era effettivamente modulare, come afferma la Congettura di Shimura-Taniyama.

Poi Wiles capì due cose. La prima era che non aveva bisogno di dimostrare tutta la Congettura di Shimura-Taniyama ma solo un caso speciale, quello delle curve ellittiche *semistabili* con coefficienti razionali. Per stabilire l'Ultimo Teorema di Fermat gli sarebbe bastato provare che la Congettura era vera per questa classe più ristretta di curve ellittiche. La seconda cosa era che in questo caso non avrebbe potuto "contare", perché si stava occupando di insiemi *infiniti.* Ogni numero razionale *a/b,* con *a e b* interi, dava una curva ellittica diversa (stiamo parlando di curve ellittiche su *tutto* il campo dei razionali); e poiché questi numeri sono infiniti (*a* e *b* possono prendere entrambi uno qualsiasi degli infiniti valori interi 1,2,3,4...), esistono infinite curve ellittiche. Perciò il contare, così come lo conosciamo, non poteva funzionare.

Suddividere un compito formidabile in tanti problemi più piccoli

Wiles pensò che avrebbe potuto cercare di affrontare, uno alla volta, problemi più piccoli. Magari poteva considerare gli insiemi di funzioni ellittiche e vedere che cosa ne poteva ricavare; era un buon approccio, perché suddivideva il suo compito permettendogli di analizzare, passo dopo passo, ogni singolo insieme. Innanzitutto si sapeva già che certe curve ellittiche erano modulari; e si trattava di risultati molto importanti, ottenuti da diversi specialisti di teoria dei numeri. Ma in breve Andrew Wiles si rese conto che considerare solo le curve ellittiche e confrontare il loro numero con quello delle forme modulari poteva non essere un buon approccio, visto che aveva a che fare con due insiemi infiniti. Di fatto non era più vicino a una soluzione di quanto lo fosse stato uno scettico come André Weil quando aveva detto: "Non vedo argomenti contro la Congettura, visto che entrambi gli insiemi sono numerabili [infiniti, ma dell'ordine di infinità dei numeri interi e razionali, non di quello, più elevato, dei numeri irrazionali e del continuo], ma nemmeno vedo argomenti a suo favore...". E dopo due anni senza risultati, Wiles tentò un nuovo approccio; pensò di *trasformare* le curve ellittiche in rappresentazioni di Galois per poi confrontare il numero di queste rappresentazioni con quello delle forme modulari.

L'idea, pur non essendo originale, era eccellente. Il principio che stava dietro questa mossa è interessante: alla teoria dei numeri interessano le soluzioni delle equazioni, per esempio dell'equazione di Fermat. La teoria matematica dei campi numerici colloca questo problema nel contesto dell'estensione di tali campi, che sono collezioni molto grandi, anzi infinite, e difficili da analizzare. Perciò i teorici dei numeri ricorrono spesso alla Teoria di Galois per spostare questi problemi da strutture complicate, come i campi, ai cosiddetti gruppi. Spesso un gruppo è generato da un insieme di elementi finito, anziché infinito. L'uso della Teoria di Galois permette dunque ai teorici dei numeri di passare da una collezione infinita a una collezione rappresentata da un insieme finito, e questa riformulazione del problema costituisce un immenso passo avanti, dato che un insieme finito di elementi è molto più facile da trattare di uno infinito. Ha senso contare solo quando il numero degli elementi è finito. Per alcuni insiemi di curve ellittiche questo approccio sembrava funzionare. Era un bel passo avanti; ma dopo un altro anno, Wiles si trovò di nuovo bloccato.

L'articolo di Flach

Ora Andrew Wiles stava cercando di contare gli insiemi di rappresentazioni di Galois corrispondenti alle curve ellittiche (semistabili) da una parte e le forme modulari dall'altra, così da mostrare che si trattava della stessa cosa. Per farlo, utilizzava proprio il settore in cui si era specializzato e aveva scritto la sua dissertazione, la cosiddetta Teoria orizzontale di Iwasawa; se ne serviva per cercare

di ottenere la Formula del Numero delle Classi, cioè un risultato di cui aveva bisogno per il "conteggio". Ma si trovava davanti a un muro. Non riusciva a fare nulla che lo portasse più vicino a una risposta.

Nell'estate del 1991 Wiles andò a un congresso a Boston dove rivide John Coates, il relatore del suo dottorato a Cambridge; e il professor Coates gli raccontò che uno dei suoi allievi, Matthias Flach, usando un vecchio lavoro di un matematico russo, un certo Kolyvagin, aveva inventato un sistema euleriano (il nome veniva da Leonhard Euler) per cercare di provare la Formula del Numero delle Classi. Era proprio quello di cui Wiles aveva bisogno per la dimostrazione della Congettura di Shimura-Taniyama.. purché fosse riuscito a estendere i risultati parziali di Flach fino a ottenere una Formula del Numero delle Classi completa. Quando seppe da Coates di questo lavoro di Flach, Wiles fu entusiasta: disse che era "fatto su misura" per il suo problema, come se Matthias Flach avesse lavorato apposta per lui. Così mise subito da parte tutto il lavoro sulla Teoria orizzontale di Iwasawa e s'immerse giorno e notte negli articoli di Kolyvagin e Flach. Se il loro "sistema euleriano" funzionava davvero, Wiles poteva sperare di ottenere il risultato sul Numero delle Classi di cui aveva bisogno, il che avrebbe dimostrato la Congettura di Shimura-Taniyama per le curve ellittiche semistabili: questo, a sua volta, sarebbe bastato per dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat.

Ma c'era da lavorare sodo, e al di fuori di quella Teoria di Iwasawa che Wiles conosceva così bene. Cominciò a sentire sempre più il bisogno di trovare qualcuno con cui parlare; voleva una persona che fosse in grado di controllare se faceva progressi in queste acque inesplorate, ma che non rivelasse niente a nessun altro.

Un amico fidato

Doveva decidersi, una buona volta: continuare a tenere il segreto su tutto, come aveva fatto per tanto tempo, o cedere e parlare con qualcuno che conoscesse bene la teoria dei numeri? Alla fine decise che probabilmente non avrebbe combinato molto, se avesse continuato a mantenere il segreto. Come lui stesso ebbe a dire, uno poteva lavorare su un problema per una vita e non vedere nessun risultato; e alla fine la necessità di confrontare i suoi dati con quelli di un'altra persona prevalse sul suo forte bisogno di tenere tutto per sé. Ma il problema era: con chi? Di chi poteva fidarsi, sicuro che non lo tradisse?

Nel gennaio del 1993, dopo sei anni di lavoro solitario, Wiles contattò il suo uomo. Scelse il professor Nick Katz, suo collega al dipartimento di matematica di Princeton. Katz era un esperto di molte delle teorie utilizzate nei tentativi di dimostrare la Formula del Numero delle Classi, ma soprattutto era assolutamente fidato. Non avrebbe mai rivelato che cosa stesse cercando di fare Andrew Wiles. Questa valutazione dello stesso Wiles risultò corretta: Katz tenne la bocca chiusa per tutto il tempo (e furono diversi mesi) in cui i due lavorarono insieme al progetto. I loro colleghi della comunità matematica di Princeton, che pure era molto compatta, non sospettarono mai nulla, nemmeno dopo averli visti per settimane passare ore e ore

insieme, con due tazze di caffè, a un tavolino appartato della stanza dei professori.

Ma Andrew Wiles aveva ancora paura che qualcuno intuisse di che cosa si stava occupando. Non poteva rischiare; così escogitò un piano per nascondere il fatto che stava lavorando molto intensamente a "qualcosa" con Nick Katz. Nella primavera del 1993 avrebbe tenuto un nuovo corso per studenti avanzati; l'avrebbe frequentato anche Katz, come allievo, e così i due avrebbero potuto lavorare insieme senza che gli altri immaginassero che cosa stavano facendo (questa almeno è la versione di Wiles). Gli studenti non potevano sospettare che dietro queste lezioni ci fosse la strada che portava all'Ultimo Teorema di Fermat, e Wiles, con l'aiuto del suo buon amico Katz, avrebbe potuto servirsi dei loro cervelli per colmare le eventuali lacune della sua teoria.

E venne annunciato il corso. Si chiamava "Calcoli con curve ellittiche", un nome talmente innocente che nessuno avrebbe potuto sospettare alcunché. Sin dall'inizio il professor Wiles disse che scopo delle sue lezioni era lo studio del recente lavoro di Matthias Flach sulla Formula del Numero delle Classi. Non si parlava né di Fermat né di Shimura né di Taniyama, e nessuno poteva immaginare che la Formula del Numero delle Classi che avrebbero studiato sarebbe stata la chiave di volta della dimostrazione dell'Ultimo Teorema, così come nessuno sospettava che il vero scopo delle lezioni non fosse quello di insegnare un po' di matematica a studenti avanzati, bensì di permettere a Wiles e Katz di lavorare insieme a questo problema, utilizzando nello stesso tempo degli ignari studenti per controllare il lavoro che facevano.

Ma nel giro di poche settimane gli studenti sparirono tutti. Non riuscivano a tenere il passo di un corso che non li portava da nessuna parte; l'unico "studente" che aveva l'aria di capirne qualcosa e di partecipare alle lezioni era l'altro professore di matematica che sedeva in mezzo a loro. Così, dopo un po', l'uditorio si ridusse al solo Nick Katz; ma Wiles andò avanti, usando il "corso" per scrivere alla lavagna la sua lunga dimostrazione della Formula del Numero delle Classi, un passo a lezione, con Katz che controllava tutto.

Le lezioni non misero in luce alcun errore. Sembrava che la Formula funzionasse; Wiles era ormai avviato a sciogliere l'enigma di Fermat. Così nella tarda primavera del 1993, mentre il corso si avvicinava alla fine, era quasi arrivato alla meta. Gli restava solo l'ultimo ostacolo; era in grado di dimostrare che quasi tutte le curve ellittiche erano modulari, ma gliene rimanevano alcune - poche - che sfuggivano alla dimostrazione. Era convinto di poter superare questa difficoltà, e in generale era ottimista; pensava che fosse tempo di parlare anche con qualcun altro per cercare di capire un po' meglio l'ultimo ostacolo che aveva di fronte. Così si rivolse a un altro collega del dipartimento di matematica di Princeton, il professor Peter Sarnak, facendo giurare anche a lui che avrebbe mantenuto il segreto; e Sarnak, stupefatto, si sentì dire: «Credo di essere sul punto di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat».

"Fu incredibile" raccontò Sarnak in seguito. "Ero sbalordito, entusiasta, turbato.. insomma ricordo che quella notte feci fatica a dormire." E così, ormai erano due i colleghi che cercavano di aiutare Wiles a terminare la dimostrazione. Nessuno riusciva a immaginare che cosa stessero facendo, però la gente si accorgeva che qualcosa bolliva in pentola; e Sarnak, pur sostenendo che nessuno scoprì mai niente per colpa sua, in seguito ammise che forse gli era scappato "qualche accenno…".

L'ultima tessera del grande mosaico

Nel maggio del 1993 Andrew Wiles era seduto alla sua scrivania, solo. Era piuttosto frustrato: sembrava che quelle poche curve ellittiche che gli erano sfuggite non intendessero tornare più indietro. Non riusciva assolutamente a dimostrare la loro modularità; ma anche di queste aveva bisogno, se doveva provare che *tutte* le curve ellittiche (semistabili) erano modulari, per ottenere l'Ultimo Teorema di Fermat. L'esserci riuscito per la maggioranza delle curve ellittiche semistabili era già di per sé un risultato matematico ragguardevole, ma non bastava a condurlo alla meta.

Per prendersi un po' di riposo dalla sua intensa ricerca, che ora non andava più avanti, Wiles riaprì un vecchio lavoro del grande maestro, Barry Mazur della Harvard University, che aveva fatto alcune scoperte pionieristiche nella teoria dei numeri. I suoi contributi erano stati fonte d'ispirazione per molti degli specialisti del settore, compresi Ribet e Frey, il cui lavoro aveva spianato la via agli sforzi di Wiles. L'articolo di Mazur che Wiles stava rileggendo era un'estensione della teoria degli ideali, avviata da Kummer e Dedekind e proseguita da un terzo matematico dell'Ottocento, Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852). Pur essendo morto giovane, Eisenstein aveva fatto passi da gigante nella teoria dei numeri; si dice addirittura che Gauss abbia affermato: "Ci sono stati solo tre matematici che hanno fatto epoca: Archimede, Newton e Eisenstein".

Nel saggio di Mazur sull'ideale di Eisenstein c'era una riga che catturò l'attenzione di Wiles: Mazur affermava che era possibile *saltare* da un insieme di curve ellittiche a un altro, e il salto aveva a che fare con i numeri primi.[26] Quello che Mazur intendeva era che se uno si occupava di curve ellittiche basate sul numero primo 3, le poteva trasformare così da studiarle usando invece il numero primo 5; e questo salto dal 3 al 5 era proprio ciò di cui Wiles aveva bisogno. Era rimasto bloccato perché non riusciva a dimostrare che certe classi di curve ellittiche basate sul 3 erano modulari, e Mazur gli diceva che poteva trasformarle in curve basate sul 5; ma Wiles aveva già dimostrato che le curve basate sul 5 erano modulari. Il salto dal 3 al 5 fu dunque lo stratagemma finale; prese quelle difficili curve ellittiche basate sul 3 e le trasformò in altre in base 5 delle quali si sapeva che erano modulari. Ancora una volta una brillante idea di un altro matematico aiutò Wiles a superare un ostacolo apparentemente insormontabile. Era arrivato, finalmente.

Anche il momento era perfetto. Un mese dopo, cioè in giugno, il suo ex relatore John Coates organizzava un congresso di teoria dei numeri a Cambridge; ci sarebbero stati tutti i grossi calibri del settore, e Cambridge era stata la città di Wiles, l'università in cui aveva conseguito il dottorato. Non era perfetto presentare proprio lì la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat? Ora Wiles stava correndo contro il tempo; doveva rimettere insieme tutta la sua dimostrazione della correttezza della Congettura di Shimura-Taniyama per le curve ellittiche semistabili, la quale implicava che la Curva di Frey non poteva esistere; e se la Curva di Frey non

[26] *Ibid.*

esisteva, non potevano esserci soluzioni dell'equazione di Fermat per $n>2$ e l'Ultimo Teorema era dimostrato. Ci vollero duecento pagine per scrivere tutto; Wiles finì appena in tempo per prendere l'aereo per l'Inghilterra. E alla fine dell'ultima delle tre conferenze potè affrontare vittorioso l'incontro con gli applausi scroscianti, i flash che lampeggiavano, i giornalisti in fermento.

Il seguito

E adesso era il momento della recensione dei colleghi. In genere una scoperta matematica (come del resto qualsiasi lavoro accademico) viene presentata a una rivista con *referee* (commissione giudicante), anzi queste riviste con *referee* sono il canale normale attraverso cui gli studiosi propongono i propri lavori per una possibile pubblicazione. E la rivista stessa che si incarica di spedire l'articolo proposto ad altri esperti, appartenenti al campo di studio pertinente, che ne esaminano il contenuto e stabiliscono se è corretto e se costituisce un contributo meritevole di pubblicazione. La pubblicazione su riviste con *referee* è il pane degli accademici; le cattedre, le promozioni e molto spesso il livello o l'aumento dello stipendio dipendono dalla produzione di articoli su queste riviste.

Ma Andrew Wiles scelse una via diversa. Invece di sottoporre la sua dimostrazione a una rivista professionale di matematica, come avrebbero fatto quasi tutti, la presentò a un congresso. La ragione, probabilmente, era duplice. Wiles aveva avuto l'ossessione della segretezza per tutti gli anni in cui aveva lavorato alla sua prova; e se avesse spedito quest'ultima a una rivista, la rivista l'avrebbe a sua volta inviata a un certo numero di recensori di sua scelta, e uno di costoro, oppure qualche redattore, avrebbe potuto far sapere qualcosa al mondo esterno. Probabilmente Wiles temeva che chi avesse letto la dimostrazione da lui proposta avrebbe potuto in qualche modo rubargliela e farla circolare sotto il proprio nome; purtroppo sono cose che succedono negli ambienti accademici. L'altra ragione, collegata alla precedente, era che Wiles, mentre presentava la sua dimostrazione a Cambridge, voleva mantenere un'atmosfera di attesa.

Ma anche se il lavoro era stato presentato a un congresso, avrebbe dovuto ugualmente essere esaminato.

Era ancora necessaria una revisione accurata da parte dei colleghi; altri esperti di teoria dei numeri avrebbero dovuto leggere la dimostrazione di Wiles, riga per riga, per assicurarsi che egli avesse veramente stabilito il risultato che aveva cercato di dimostrare.

La grande voragine si spalanca

Le duecento pagine della dimostrazione di Wiles furono spedite a diversi esperti di primo piano di teoria dei numeri. Alcuni di loro espressero subito qualche dubbio, ma in genere quelli del mestiere pensavano che la dimostrazione, probabilmente, era corretta, anche se preferivano aspettare e sentire il verdetto degli esperti. «Eh sì» mi disse Ken Ribet quando gli chiesi se aveva creduto nella prova di Wiles. «Non riuscivo a vedere quello che alcuni dissero subito dopo averla letta, vale a dire che non c'era un sistema euleriano.»

Uno degli esperti scelti per rivedere la prova di Wiles era Nick Katz, il suo amico di Princeton. Il professor Katz passò due interi mesi, luglio e agosto del 1993 (durante i quali non fece nient'altro) a studiare la dimostrazione. Ogni giorno si metteva alla scrivania e leggeva lentamente, riga per riga, simbolo per simbolo, implicazione per implicazione, così da essere certo che il tutto fosse perfettamente chiaro e sottoscrivibile da qualsiasi matematico che l'avesse letto. Una volta o due al giorno mandava un messaggio per posta elettronica a Wiles, che quell'estate era lontano da Princeton, per chiedergli: "Che cosa vuoi dire alla riga tale della pagina tale?" oppure per dirgli: "Non vedo come questa conclusione segua da quella sopra" e cose simili. Wiles in genere rispondeva per posta elettronica, ma se il problema richiedeva un discorso più dettagliato mandava un fax.

Un giorno, mentre era a circa due terzi del lungo manoscritto, Katz incontrò un problema. Da principio sembrava una cosa abbastanza innocua, simile alle molte cui Wiles aveva già risposto lasciandolo completamente soddisfatto; ma quella volta non andò così. Wiles rispose alle domande di Katz per posta elettronica, ma Katz dovette rispondere a sua volta: "Continuo a non capire, Andrew". Allora Wiles mandò un fax in cui cercava di precisare il nesso logico, ma Katz continuava a essere insoddisfatto. C'era da qualche parte un puro e semplice errore. In teoria quello era proprio uno degli argomenti che Wiles e Katz avevano rivisto molto attentamente in primavera, mentre Wiles teneva il suo "corso"; le difficoltà avrebbero dovuto essere state appianate tutte, ma evidentemente la lacuna nel ragionamento di Wiles era sfuggita a entrambi. Forse, se gli studenti fossero rimasti, uno di loro avrebbe potuto avvertire i due del problema.

Mentre Katz scopriva l'errore anche altri matematici, in tutto il mondo, si rendevano conto di quello stesso problema nella prova di Wiles. Mancava il sistema euleriano, punto e basta; e non c'era niente da fare. Ma senza sistema euleriano (in teoria, una generalizzazione dei precedenti lavori di Flach e Kolyvagin) non c'era Formula del Numero delle Classi, e senza Formula del Numero delle Classi era impossibile "contare" le rappresentazioni di Galois delle curve ellittiche da un lato e le forme modulari dall'altro, e la Congettura di Shimura-Taniyama non poteva considerarsi dimostrata. Ma se la Congettura di Shimura-Taniyama non era dimostrata, non c'era neppure alcun modo di dimostrare l'Ultimo Teorema di Fermat. Insomma: il buco nel sistema euleriano faceva crollare tutto il resto come un castello di carte.

Sofferenza

Andrew Wiles tornò a Princeton nell'autunno del 1993. Era imbarazzato, sconvolto, furioso, frustrato, umiliato. Aveva promesso al mondo una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat e non era riuscito a darla. In matematica, come in quasi tutti gli altri campi, non ci sono medaglie d'argento e non vale il motto "l'importante è partecipare". L'abbacchiatissimo Wiles tornò al suo attico e cercò di aggiustare la prova. "A quel punto si nascondeva a tutto il mondo" ricorda Nick Katz "e penso che si sentisse molto imbarazzato." Anche altri colleghi cercarono di aiutarlo, compreso il suo ex allievo Richard Taylor che insegnava a Cambridge ma lo raggiunse a Princeton per cercare di sistemare la dimostrazione insieme a lui.

"I primi sette anni, lavorando da solo, mi ero goduto ogni minuto" ricorda Wiles "benché l'ostacolo che mi stava davanti apparisse difficile o addirittura impossibile; ma ora fare matematica stando così in vista non era assolutamente nel mio stile. Non desidero proprio ripetere questa esperienza." Ma la brutta esperienza non accennava a finire. Richard Taylor, terminato l'anno sabbatico, tornò a Cambridge; e ancora Wiles non faceva progressi. I colleghi lo guardavano con un misto di impazienza, speranza e pietà, e tutte le persone a lui vicine capivano chiaramente che soffriva. La gente voleva sapere, voleva sentire buone notizie, ma nessuno dei colleghi osava chiedergli come procedeva il lavoro sulla dimostrazione.

Anche il resto del mondo, fuori del suo dipartimento, era curioso. La notte del 4 dicembre 1993 Andrew Wiles spedì un messaggio per posta elettronica al gruppo Sci.Math, al quale appartenevano diversi specialisti di teoria dei numeri e di altri settori della matematica:

> Date le ipotesi che si fanno circa lo stato dei miei lavori sulla Congettura di Shimura-Taniyama e sull'Ultimo Teorema di Fermat, riferirò brevemente sulla situazione. Durante il processo di revisione è emerso un certo numero di problemi; per la maggior parte essi sono stati risolti, ma ce n'è uno che non ho ancora superato.. Credo di poterne uscire nel prossimo futuro usando le idee illustrate nelle mie conferenze di Cambridge. C'è ancora molto da lavorare sul manoscritto, e questo fatto lo rende inadatto a una diffusione sotto forma di stampa preliminare. Nel corso che inizierò in febbraio a Princeton darò un resoconto completo di questo lavoro.
>
> *Andrew Wiles*

Post mortem

Ma l'ottimismo di Wiles era prematuro; e il corso previsto a Princeton, quale che fosse il suo contenuto, non avrebbe prodotto alcuna soluzione. A poco più di un anno di distanza dall'effimero trionfo di Cambridge, Andrew Wiles stava per rinunciare a ogni speranza e per dimenticare la sua dimostrazione zoppa.

La mattina di lunedì 19 settembre 1994 sedeva alla sua scrivania coperta di carte nell'università di Princeton. Decise di dare un'ultima occhiata alla dimostrazione prima di buttarla e abbandonare ogni speranza di sciogliere l'enigma di Fermat. Voleva capire che cosa fosse, esattamente, a impedirgli di costruire il sistema euleriano; voleva avere, almeno, la soddisfazione di sapere come mai non ce l'aveva fatta. Perché non c'era un sistema euleriano? Voleva individuare con precisione il dato tecnico che mandava all'aria tutto quanto. Pensava che se doveva rinunciare, almeno avrebbe avuto diritto di sapere perché si era sbagliato.

Wiles studiò i fogli che aveva davanti, concentrandosi molto intensamente per circa venti minuti, e vide l'esatto motivo per cui non riusciva a far funzionare il sistema; capì finalmente dove stava l'errore. In seguito descrisse così il suo stato d'animo: "Fu il momento più importante di tutta la mia vita professionale. Improvvisamente, e in modo del tutto inaspettato, ebbi questa incredibile rivelazione. Non mi accadrà mai più una cosa così..". Gli spuntarono le lacrime agli occhi; si sentiva soffocare per l'emozione. Ciò di cui si rese conto in quel fatidico momento era "di una bellezza così indescrivibile, così semplice ed elegante.. io lo guardavo, incredulo". Wiles capì che il motivo che vanificava il sistema euleriano era esattamente lo stesso che poteva far *funzionare* la Teoria orizzontale di Iwasawa da lui abbandonata tre anni prima. Pensò che forse sognava, che era troppo bello per essere vero, ma più tardi avrebbe detto che era troppo bello per essere *falso.* Proprio così: la scoperta era così potente e bella che *doveva* essere vera.

Wiles camminò su e giù per il dipartimento ore e ore. Non sapeva se era desto o sognava; ogni tanto tornava alla scrivania per vedere se la sua fantastica scoperta era ancora lì. Andò a casa; doveva dormirci su, forse il mattino dopo avrebbe scoperto qualche difetto in questo nuovo argomento. Il mondo intero lo teneva sotto pressione da più di un anno: un anno abbondante di tentativi falliti uno dopo l'altro aveva scosso la sua fiducia in se stesso. Il mattino dopo tornò alla scrivania. L'incredibile gemma che aveva scoperto il giorno prima era ancora lì ad aspettarlo.

Wiles riscrisse la sua dimostrazione usando l'approccio corretto, basato sulla Teoria orizzontale di Iwasawa, e finalmente tutto andò a posto. L'approccio corretto era quello che aveva usato tre anni prima; ora lo sapeva, ma questa conoscenza gli veniva dal fallimento dell'approccio di Flach-Kolyvagin che aveva usato verso la metà del cammino. Ora il manoscritto era pronto per essere spedito. Wiles, pieno di entusiasmo, segnò la data sull'agenda del computer e spedì messaggi elettronici a una ventina di matematici di tutto il mondo: "Preparati a ricevere un pacco della Federai Express entro pochi giorni".

Come aveva promesso al suo amico Richard Taylor, che era venuto apposta dall'Inghilterra per aiutarlo a correggere la dimostrazione, il nuovo articolo con la Teoria di Iwasawa corretta portava il nome di entrambi, anche se il risultato vero e proprio era stato ottenuto da Wiles dopo la partenza di Taylor. I matematici che ricevettero la versione corretta del lavoro di Cambridge l'esaminarono in tutti i particolari nel giro di poche settimane, e non trovarono nessun errore. Questa volta Wiles presentò i suoi risultati in modo ortodosso; invece di fare come a Cambridge un anno e mezzo prima, mandò l'articolo a una rivista specializzata, gli *Annals of Mathematics,* dove sarebbe stato esaminato da altri matematici. L'esame richiese

qualche mese, ma questa volta non furono scoperti errori; e il numero del maggio 1995 della rivista riportava l'articolo originale di Cambridge e le correzioni dovute a Taylor e allo stesso Wiles. Finalmente l'Ultimo Teorema di Fermat poteva riposare.[27]

Fermat aveva una prova?

Wiles ha detto che la sua è una "dimostrazione del XX secolo", ed effettivamente ha usato il lavoro di molti matematici del Novecento, ma anche dei secoli precedenti; i mille e mille elementi delle sue costruzioni vengono tutti dall'opera di altri autori, di molti altri. Perciò la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat in realtà è la conquista di un gran numero di matematici vissuti nel Novecento e in tutti i secoli precedenti, a partire dall'epoca dello stesso Fermat. Secondo Wiles, Fermat non avrebbe mai potuto avere in mente questa prova quando scrisse la sua famosa glossa; e questa è la pura verità, perché prima del XX secolo la Congettura di Shimura-Taniyama non esisteva. Ma poteva avere in testa un'altra dimostrazione?

La risposta, probabilmente, è no; ma questa non è una certezza. Non lo sapremo mai. D'altronde Fermat visse ancora ventotto anni dopo avere scritto il suo teorema sul margine, e non ne parlò mai più. Forse sapeva di non poterlo dimostrare, oppure riteneva, erroneamente, che il metodo della discesa infinita da lui utilizzato per provare il semplice caso di $n = 3$ valesse anche come soluzione generale. O magari si dimenticò semplicemente del teorema e si mise a fare altre cose.

Per dimostrare il Teorema come è stato dimostrato, finalmente, negli anni novanta c'è voluta molta più matematica di quella che Fermat poteva conoscere. La profondità del teorema risiede nel fatto che non solo la sua storia copre l'intero arco della civiltà umana, ma la soluzione finale è stata ottenuta imbrigliando, e in un certo senso unificando, la matematica in tutta la sua ampiezza. È stata questa unificazione di settori matematici apparentemente eterogenei a permettere, alla fine, di centrare il risultato.

E anche se è stato Andrew Wiles a dare l'ultima (e importante) spinta, dimostrando una variante della Congettura di Shimura-Taniyama, indispensabile per confermare il Teorema di Fermat, l'impresa, nel suo insieme, è stata opera di molte persone, e sono stati tutti i loro contributi messi insieme a rendere possibile la soluzione finale. Senza l'opera di Ernst Kummer non ci sarebbe stata la teoria degli ideali, senza ideali l'opera di Barry Mazur non sarebbe esistita, senza Mazur non ci sarebbe stata la Congettura di Frey, senza questa cruciale congettura e senza la sua sintesi da parte di Serre, Ribet non avrebbe dimostrato che la Congettura di Shimura-Taniyama implicava l'Ultimo Teorema *di* Fermat. Né sembra che sia possibile una

[27] Il primo e più importante dei due articoli (A. Wiles, «Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem», in *Annals of Mathematics,* 1995, vol. CXLII, pagg. 443-551) comincia con quella che fu l'effettiva enunciazione a margine del suo teorema da parte di Fermat, in latino: *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mìrabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet. Pierre de Fermat.* La rivista andò esaurita prima ancora della data di pubblicazione, e impose per la prima volta un prezzo di vendita di quattordici dollari a copia.

dimostrazione dell'Ultimo Teorema senza la Congettura proposta da Yutaka Taniyama a Tokyo-Nikko nel 1955, e successivamente affinata e perfezionata da Goro Shimura. O forse sì?

Naturalmente Fermat non avrebbe potuto formulare una congettura così generale, capace di unificare due rami della matematica molto diversi. O forse sì? Nulla si può affermare con certezza al riguardo. Sappiamo solo che il Teorema alla fine è stato confermato e che la dimostrazione è stata controllata e verificata nei minimi particolari da decine di matematici di tutto il mondo.

KENNETH A. RIBET

Da sinistra a destra: *John Coates, Andrew Wiles, Ken Ribet e Karl Rubin festeggiano la dimostrazione di Wiles a Cambridge, subito dopo la storica presentazione.*

Ma il solo fatto che una dimostrazione esista e che sia molto complicata e avanzata non significa che non ne sia possibile una più semplice, tanto che Ribet, in uno dei suoi articoli, indica una direzione nella quale forse sarebbe possibile dimostrare il Teorema di Fermat senza la Congettura di Shimura-Taniyama. E forse Fermat conosceva molta feconda matematica "moderna", oggi perduta (sta di fatto comunque che la copia del Diofanto di Bachet sulla quale avrebbe scritto la sua glossa non è mai stata ritrovata). Insomma, Pierre de Fermat possedeva o no una "dimostrazione veramente meravigliosa" del suo Teorema, che tuttavia il margine della pagina era troppo angusto per contenere? Questo resterà, in eterno, il suo enigma.

ROBERT P. MATTHEWS, PRINCETON UNIVERSITY

Gerd Faltings aveva impostato in maniera completamente diversa la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Dopo l'insuccesso iniziale di Wiles nel 1993, molti temettero che Faltings arrivasse prima di lui alla prova corretta.

Andrew Wiles al momento cruciale della sua terza lezione a Cambridge, nel giugno del 1993, quando la dimostrazione del Teorema di Fermat apparve a tutti imminente.

KENNETH A. RIBET

KENNETH A. RIBET

Ken Ribet nel famoso caffè dove finì di dimostrare che la Congettura di Shimura-Taniyama implicava la verità dell'Ultimo Teorema di Fermat.

Nota dell'autore

Nel preparare questo libro ho ricavato gran parte dello sfondo storico da un'ampia varietà di fonti. La mia favorita, nonché la più completa e originale, è *Men of Mathematics* [Uomini di matematica] di E.T. Bell (anche se non mi piace il titolo sessista, che è pure fuorviante perché due di questi matematici erano donne; il libro è stato scritto nel 1937). Altri storici della matematica hanno evidentemente ricavato le proprie informazioni da Bell, per cui qui non farò il loro nome. Tutte le mie fonti importanti sono citate in nota. In più ho trovato utili anche gli articoli di Jacquelyn Savant dell'università di Princeton *(Princeton Weekly Bulletin,* 6 settembre 1993), e la ringrazio per avermi mandato una copia di un programma sull'Ultimo Teorema di Fermat trasmesso dalla BBC.

Devo a C.J. Mozzochi diverse foto di matematici che sono stati coinvolti a vario titolo nell'impresa della dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Ringrazio di cuore il professor Kenneth A. Ribet della University of California (Berkeley) per alcune istruttive conversazioni e molte informazioni importanti su quella parte del suo lavoro che ha portato alla dimostrazione di tale teorema. Sono profondamente grato al professor Goro Shimura dell'università di Princeton per avermi concesso cosi generosamente il suo tempo, rendendomi accessibili molte notizie importanti sul suo lavoro e la sua Congettura, senza la quale non ci sarebbe stata una dimostrazione del Teorema di Fermat. Sono grato anche al professor Gerd Faltings del Max Planck Institut di Bonn e al professor Gerhard Frey dell'università di Essen in Germania per alcune stimolanti conversazioni e diverse idee illuminanti. Ringrazio pure il professor Barry Mazur della Harvard University per avermi spiegato alcuni importanti concetti di geometria della teoria dei numeri. Gli errori che possono eventualmente rimanere sono sicuramente miei.

Ringrazio il mio editore John Oakes per avermi incoraggiato e sostenuto. Un grazie anche a Jill, Ellyn, Riley e Kathryn Belden della Four Walls Eight Windows. Infine desidero esprimere profonda gratitudine a mia moglie Debra.